D-MAVT Lineare Algebra II
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 7

Aufgabe 1 ist online auf `https://echo.ethz.ch` zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 23. April um 14:00 Uhr** (D-MAVT) bzw. **Montag, den 26. April um 14 Uhr** (D-MATL) ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag online per Sam-Uploadtool `https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0172-00&serie=s07` abgeben.

---

1. Sei $\mathcal{P}_3$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3. Die lineare Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, $p(x) \mapsto p(x) - p'(x)$ hat die Eigenwerte ...

(a) ~~0~~ mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.

(b) ~~0~~ mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 1.

(c) 1 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.

(d) 1 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 1.

2.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie von Hand eine orthogonale Eigenbasis zu A.

c) Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit MATLAB.

3.

a) Diagonalisieren Sie – falls möglich – die Matrizen

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii) } C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Kann man in den Fällen, in denen die Matrizen diagonalisierbar sind, die entsprechenden Transformationsmatrizen T orthogonal wählen? Wenn ja, geben Sie so ein T an.

① $p(x) \to p(x) - p'(x)$

$F(1) \to 1 \to \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$F(x) \to x-1 \to \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{Spalten}}$ $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & -2 & 0\\0 & 0 & 1 & -3\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$F(x^2) \to x^2-2x \to \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$

$F(x^3) \to x^3-3x^2 \to \begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Dreiecksmatrix $\Rightarrow$ EW auf Diagonale $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\lambda = 1}}$

$\hookrightarrow$ alg. Vf $= 4$, g. Vf $= 1$, da $\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & -3\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\hookrightarrow E_1 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

② $A = \begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\2 & 3 & -1\\2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ char. Pol.: $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 \overset{!}{=} 0$

$\hookrightarrow$ Ausprobieren: $\lambda_1 = -2$

$\Rightarrow$ Polynomdivision: $(\lambda+2)(-\lambda^2+8\lambda-16)$
$= -(\lambda+2)(\lambda-4)^2$

EV: $\lambda_1 = -2$: $\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\2 & 5 & -1\\2 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow E_{-2} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\lambda_{2,3} = 4$: $\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\2 & -1 & -1\\2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow E_4 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$

b) A Sym. $\Rightarrow$ EV zu versch. EW orthogonal

$\Rightarrow \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Gram-Schmidt für $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow e^{(2)} = \frac{v^{(2)}}{\|v^{(2)}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{(3)} = v^{(3)} - \langle v^{(3)}, e^{(2)}\rangle \cdot e^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ orth. Eigenbasis: $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

③ Diagonalisieren

(i) $A = \begin{pmatrix}3 & -4\\1 & -1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ char. Pol.: $(\lambda-1)^2 \overset{!}{=} 0$

$\lambda_{1,2} = 1$

EV: $\begin{pmatrix}2 & -4\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ nur ein EV!

$\Rightarrow$ geom. Vf $\neq$ alg. Vf

$\not\Rightarrow$ halbeinfach

$\Rightarrow$ <u>nicht diag.bar!</u>

(ii) B ist symm. und reell $\Rightarrow$ B ist diag.bar

$\hookrightarrow -\lambda(\lambda-6)(\lambda-1) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ drei versch. EW $\Rightarrow$ 3 lin. unabh. EV

$\lambda_1 = 0 \longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 6 \longrightarrow v_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 1 \longrightarrow v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow T = \begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\1 & -1 & 2\\1 & 5 & 0\end{pmatrix}$

$\boxed{T^{-1}BT = D}$

(iii) $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = -1$ $\Rightarrow$ versch. EW $\Rightarrow$ Eigenbasis existiert

$\hookrightarrow v_1 = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ (z.B.) und $v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow T = \begin{pmatrix}-2 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow D = T^{-1}CT$

4. Angeregt durch die berühmte Kaninchenaufgabe von Leonardo von Pisa (1170–1250), genannt Fibonacci, stellen wir die folgende Aufgabe:
Annahme: Neugeborene Kaninchenpaare bringen nach dem ersten und dem zweiten Monat jeweils ein neues Kaninchenpaar zur Welt und stellen dann die weitere Fortpflanzung ein.

a) Man bestimme eine Rekursionsformel für die Anzahl F_n der im Monat n neugeborenen Kaninchenpaare. Man starte mit $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

b) Bestimmen Sie das allgemeine Glied F_n nach folgender Anleitung:

   1. Setzen Sie $x^{(n)} = \binom{F_n}{F_{n+1}}$, $n = 0, 1, \ldots$. Die Zuordnung $x^{(n)} \longmapsto x^{(n+1)}$ ist eine lineare Abbildung. Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A.
   2. Die Zuordnung $x^{(0)} \longmapsto x^{(n)}$ ist auch eine lineare Abbildung. Sie wird beschrieben durch die Abbildungsmatrix A^n. Berechnen Sie den Vektor $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$ und geben Sie F_n an.

c) Man bestimme den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$