

Serie 8

Aufgabe 1-5 ist online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 17. April um 14:00 Uhr** ab.

Die Abgabe der Serie erfolgt als Scan per E-mail (oder via polybox, falls angeboten) an ihre/ihren Übungsgruppenleiterin/Übungsgruppenleiter.

~~1.~~ $x^2 + xy + 3y^2$ ist eine quadratische Form.

(a) richtig

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2$$

(b) falsch

$$\hookrightarrow a_{11} = 1; a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}; a_{22} = 3$$

~~2.~~ $x^2 + y$ ist eine quadratische Form.

(a) richtig

(b) falsch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \dots \rightarrow \text{funktioniert nicht!}$$

~~3.~~ $2x_1x_2$ wird durch die Hauptachsentransformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$.

Berechnung
 $y_1^2 - y_2^2$

(a) richtig

(b) falsch

$$\begin{aligned} y_1^2 - y_2^2 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2) \\ &= 2x_1x_2 \Rightarrow \text{richtig} \end{aligned}$$

4. $2x_1x_2 = 1$ stellt eine Hyperbel dar.

(a) richtig

(b) falsch

$$2x_1x_2 = y_1^2 - y_2^2 = 1$$

\hookrightarrow Hyperbel

5. $2x_1x_2$ ist eine positiv definite quadratische Form.

(a) richtig

(b) falsch

$\overbrace{\quad}^{\text{indefinit}}$

~~6.~~ Gegeben sind die quadratischen Formen im \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2, \\ q(x) &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3. \end{aligned}$$

~~a)~~ Man schreibe die Formen in der Gestalt $x^\top Ax$ mit symmetrischer Matrix A .

~~b)~~ Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und führe die Hauptachsentransformation durch.

~~c)~~ Sind Q und q positiv oder negativ (semi-)definit oder indefinit?

~~d)~~ Sei $q_B(x) = x^\top Bx$ für eine nicht symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Man bestimme eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass $q_B(x) = q_A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

~~7.~~ Man bestimme durch Hauptachsentransformation und Translation die Normalform der Quadrik

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6(x_1 + x_2 + x_3) + 9 = 0\}.$$

Wie lautet die zugehörige Koordinatentransformation?

8. Man finde die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto -12x + 5x^3 - 12y + 3x^2y + 3xy^2 + 5y^3$$

und bestimme, ob es sich dabei um lokale Maxima oder Minima oder Sattelpunkte handelt.

Hinweis: Man wende das Hurwitz-Kriterium auf die Hessesche Matrix an.

$$(6) \text{ a)} \quad Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$$

$$q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$$

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ bx_1 + dx_2 + ex_3 \\ cx_1 + ex_2 + fx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + 2cx_1x_3 + dx_2^2 + 2ex_2x_3 + fx_3^2$$

$$\Rightarrow Q: a=2; b=1; c=e=0; d=2, f=3$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$q: A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) Q: \text{EW: } \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(\dots) = (2-\lambda)^2(3-\lambda) - (3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda)(2-\lambda)^2 - 1$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = 3$$

$$\hookrightarrow \text{EV: } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(4-4\lambda+\lambda^2-1)$$

$$\Rightarrow a=b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3)$$

$$\lambda_3 = 1$$

$$\hookrightarrow \text{EV: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)$$

$$\Rightarrow a=-b; c=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)^2(\lambda-1) \neq 0$$

\rightsquigarrow Hauptachsentransformation:

$$t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; t^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; t^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = Ty$$

$$Q(x) = x^T A x = y^T T^T A T y = \underline{\underline{3y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2}}$$

Tipps: EW und EV berechnen

D und T berechnen (T orthonormal)

$x = Ty$ (Hauptachsentransformation)

$\rightsquigarrow Q(x) = x^T A x = y^T T^T A T y = \text{"Resultat"}$

c) Da nur positive EW $\Rightarrow Q$ ist positiv definit

$$b) q: \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}; \lambda_3 = 1$$

$$\text{EV: } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

\Rightarrow orthonormale Eigenbasis:

$$t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2} \\ 0 - \frac{1}{2} \\ 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = Ty$$

$$\rightarrow \underline{\underline{q(x) = x^T A x = y^T T^T A T y = -\frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2 + y_3^2}}$$

c) q: positive und negative EW \rightarrow q ist indefinit

$$\textcircled{6} \quad d) q_B = x^T B x = (x^T B x)^T = x^T B^T x$$

$$q_B = \frac{1}{2} (x^T B x + x^T B^T x) = x^T \left(\frac{1}{2} (B + B^T) \right) x$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} (B + B^T) = A^T$$

$$\textcircled{7} \quad Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6(x_1 + x_2 + x_3) + 9 = 0\}$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & ? \\ -1 & 2 & ? \\ 2 & ? & -1 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$Q = x^T A x + \alpha^T x + g = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \det(A - \lambda \cdot I) &= -(2-\lambda)^2(2+\lambda) = 0 \\ \rightarrow \lambda_{1,2} &= 2 \\ \hookrightarrow EV: & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &= -2 \\ \hookrightarrow EV: & \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \rightarrow \text{orth. Eigenbasis} \\ t^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ t^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ t^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= Ty \\ \Rightarrow Q &= x^T A x + \alpha^T x + g = y^T T^T A T y + \underbrace{\overbrace{(-6, -6, -6)^T}^{\alpha^T} T y}_{= -6(0+2+0) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}} + g \\ &= 3y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 - 6\sqrt{3}y_2 + g \end{aligned}$$

\rightarrow quadratisches Ergänzen

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q &= 3y_1^2 + 3(y_2^2 - 2\sqrt{3}y_2 + 3) - 3y_3^2 \\ &= 3y_1^2 + 3(y_2 - \sqrt{3})^2 - 3y_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow z &= y + c, c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow Q &= 3z_1^2 + 3z_2^2 - 3z_3^2 \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_2)$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3) - \sqrt{3}$$

$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-x_1 - x_2 + 2x_3)$$

⑧ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto -12x + 5x^3 - 12y + 3x^2y + 3xy^2 + 5y^3$

\rightarrow krit. Pkt von f sind durch $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ gegeben

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -12 + 15x^2 + 6xy + 3y^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -12 + 3x^2 + 6x^2y + 15y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 12y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+y)(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow$$
 krit. Pkt: $x=y$ oder $x=-y$

(i) $x=y \rightarrow 24x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $x=-y \rightarrow 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -y = \pm 1$

\rightarrow krit. Pkte: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}); (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}); (1, -1); (-1, 1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 30x + 6y \quad \rightarrow P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x + 6y$$

$$\hookrightarrow$$
 Hesse Matrix $H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 18\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 18\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x + 30y$$