D-MAVT Lineare Algebra II
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 9

Aufgabe 1-5 ist online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 1. Mai um 14:00 Uhr** ab.
Die Abgabe der Serie erfolgt als Scan per E-mail (oder via polybox, falls angeboten) an ihre/ihren Übungsgruppenleiterin/Übungsgruppenleiter.

---

1. Wahr oder falsch: Im Lösungspunkt einer linearen Ausgleichsaufgabe $Ax-c = r$ steht der Residuenvektor r senkrecht auf dem Bildraum von A.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

2. Wahr oder falsch: Eine lineare Ausgleichsaufgabe hat immer genau eine Lösung; sie minimiert den Fehlervektor.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

3. Wahr oder falsch: Falls der Messvektor c einer linearen Ausgleichsaufgabe $Ax - c = r$ im Spaltenraum der Koeffizientenmatrix A liegt, so ist der minimale Residuenvektor r gleich dem Nullvektor.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

4. Bei einem Modellbaumotor wurde die Abhängigkeit zwischen der Drehzahl X (in $1000\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$) und der Leistung Y (in kW) untersucht. Es ergab sich das folgende Messprotokoll:

1. Messung:	$X_1 = 1;$	$Y_1 = 1$
2. Messung:	$X_2 = 2;$	$Y_2 = 2$
3. Messung:	$X_3 = 4;$	$Y_3 = 3.$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die zugehörige Ausgleichsgerade $y = ax + b$: Die Fehlergleichungen hierfür lauten

$$aX_i + b - Y_i = r_i$$

für $i = 1, 2, 3$.

(a) $a = \frac{3}{11}; b = \frac{1}{2}$.

(b) $a = \frac{3}{4}; b = \frac{3}{5}$.

(c) $a = \frac{3}{5}; b = \frac{9}{14}$.

(d) $a = \frac{9}{14}; b = \frac{1}{2}$.

$$A^T A x = A^T c \qquad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x = A^T c = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 9/14, \quad b = 1/2$$

5. Lösen Sie von Hand folgendes Ausgleichsproblem mit der QR-Zerlegung:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 1 & = & r_1 \\ & & x_2 & - & 3 & = & r_2 \\ & & x_2 & - & 4 & = & r_3. \end{array}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie dazu das Problem in der Form $Ax - c = r$, bestimmen Sie die QR-Zerlegung $A = QR$ mit Hilfe einer geeigneten Givens-Rotation sowie den Vektor $d = Q^\top c$, und bestimmen Sie schliesslich die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ des Ausgleichsproblems.

(a) $x = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$.

(b) $x = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(c) $x = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.

(d) $x = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

a_{32} soll eliminiert werden

$\Rightarrow i = 3, j = 2 \Rightarrow a_{ii} = 1, a_{ij} = 1$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow Q'^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q'^T \cdot A = A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$ (da obere Dreiecksmatrix)

$$\Rightarrow Q = (Q'^T)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d = Q^T \cdot c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$R \cdot x = d \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a + b = 1 \\ \sqrt{2}\, b = 7/\sqrt{2} \end{array} \Rightarrow b = 7/2$$

$$\Rightarrow a = -5/2$$