# Übungsstunde 10

## Unterraum

Ein Unterraum ist eine nichtleere Teilmenge $U$ eines Vektorraumes $V$, falls:

1) $\forall a, b \in U$: $\quad a + b \in U$
2) $\forall a \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\quad \alpha \cdot a \in U$
3) die Menge $U$ nichtleer ist $\rightarrow U \neq \{\emptyset\}$

$\rightarrow$ Ein Unterraum ist selber ein Vektorraum!

**Beispiel**

Ist die Menge $U = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot x_2 \geq 0\}$ ein UR von $\mathbb{R}^2$?

$\rightarrow$ Prüfe die Bedingungen

Wähle $a, b$ so, dass sie die Bedingung von $U$ erfüllen:

$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

1) $a + b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = c$

$\hookrightarrow$ liegt $c = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $U$?

$\rightarrow (-2) \cdot 2 = -4 \leq 0 \Rightarrow c \notin U$

$\Rightarrow$ Die Menge $U$ ist <u>kein UR</u> von $\mathbb{R}^2$!

**Beispiel**

Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $A^{n \times n}$

$\rightarrow$ Menge $U$ ist Lösungsmenge des LGS $Ax = 0$

$\hookrightarrow$ Ist $U$ ein Unterraum von $V$?

$\rightarrow$ Seien $a$ und $b$ zwei Lsg von $Ax = 0$

$\hookrightarrow$ Es gilt also: $A \cdot a = 0$ und $A \cdot b = 0$

1) $a+b=c \rightsquigarrow A\cdot c = A(a+b) = A\cdot a + A\cdot b = 0+0=0$

↳ erfüllt!

2) $\alpha\cdot a: \rightarrow A(\alpha\cdot a) = \alpha\cdot A\cdot a = \alpha\cdot 0 = 0$

↳ auch erfüllt

$\Rightarrow$ U ist ein Unterraum von V.

Achtung: Dies gilt nur für homogene LGS!

Beispiel

Ist $U=\{A\in V \mid A^T=-A\}$ ein UR von $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$?

$A_1, A_2 \in U \Rightarrow A_1^T=-A_1$ und $A_2^T=-A_2$

1) $(A_1+A_2)^T = A_1^T + A_2^T = -A_1 - A_2 = -(A_1+A_2)$

↳ erfüllt

2) $(\alpha\cdot A_1)^T = \alpha^T\cdot A_1^T = \alpha\cdot A_1^T = \alpha\cdot(-A_1) = -(\alpha\cdot A_1)$

↳ erfüllt

$\Rightarrow$ U ist ein Unterraum von V

Ist $W=\{A\in V \mid \det(A)=0\}$ ein UR von $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$?

$A_1, A_2 \in U \Rightarrow \det(A_1)=\det(A_2)=0$

1) $\det(A_1+A_2) \neq \det(A_1)+\det(A_2)$

z.B. $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\rightarrow \det(A_1)=0$ und $\det(A_2)=0$

$\rightsquigarrow A_1+A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \rightarrow \det(A_1+A_2)=1\neq 0$

$\Rightarrow$ nicht erfüllt

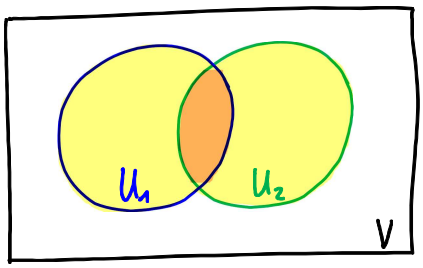
$\Rightarrow$ W ist kein Unterraum von $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$

# Durchschnitt / Summe

Seien $U_1, U_2$ zwei Unterräume eines Vektorraumes $V$, dann gilt:

$$U_1 \cap U_2 = \{ u \in V \mid u \in U_1 \text{ und } u \in U_2 \} \rightsquigarrow \text{Durchschnitt}$$

$$U_1 + U_2 = \{ w = u_1 + u_2 \in V \mid u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2 \} \rightsquigarrow \text{Summe}$$




$U_1 + U_2$

$U_1 \cap U_2$

**Beispiel**

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ mit } x_1 \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ mit } y_1, y_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V_1 \cap V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ mit } a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V_1 + V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ mit } b, c \in \mathbb{R} \right\}$$