Übungsstunde 11

Linearkombination

Seien $v_1, v_2, \dots, v_n$ Vektoren im VR V und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \quad v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$ ist Linearkombination

Beispiel

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ ist $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4?

$$w = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -7 \end{array}\right) \Rightarrow \alpha_4 = \frac{7}{5}, \; \alpha_3 = a, \; \alpha_2 = 1 - 2\cdot\alpha_3, \; \alpha_1 = -\frac{1}{5}$$

$\rightarrow$ Kontrolle: z.B. $\alpha_3 = a = 0 \rightarrow \alpha_2 = 1$

$$\Rightarrow w = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 + \frac{7}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \checkmark$$

Beispiel

$p_1(x) = x^3 + x^2$; $\quad p_2(x) = x^2 - 2x - 4$;

$p_3(x) = 3x + 4$; $\quad p_4(x) = 2x + 3$

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ als Linearkombination von p_1, p_2, p_3, p_4?

$$P(x) = 2p_1(x) + p_2(x) + p_4(x)$$

$$2x^3 + 2x^2 + x^2 - 2x - 4 + 2x + 3 = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

Abhängig / Unabhängig

Sei V ein VR. Dann heissen die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig, falls $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i = 0$ nur die triviale Lösung besitzt.

↳ Ansonsten linear abhängig

Beispiel

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ t^2 \end{pmatrix}$

→ Für welche Werte von t sind diese drei Vektoren linear unabhängig?

↳ LGS $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$ lösen

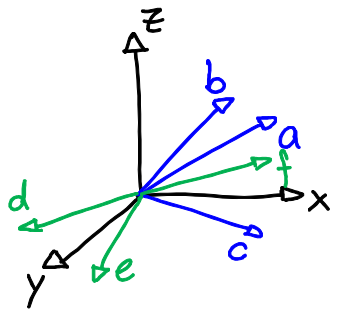
$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & t & t^2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} - \frac{t}{2}\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-2t & 0 \end{array}\right)$$

$t^2 - \frac{t}{2} \cdot 4$

→ $t(t-2) = 0$ ⇒ <u>nur</u> triv. Lsg für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

"ohne"

Geometrische Interpretation von linear abhängig.



$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⇒ lin. unabhängig

$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇒ lin. unabhängig

$d = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇒ lin. abhängig

⇝ vgl. mit Beispiel 1

Erzeugendensystem

Kann man jeden Vektor eines VR V als lineare Kombinationen der Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ von V darstellen, also $V = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dann nennt man diese Vektoren ein erzeugenden System von V. V heisst dann endlich dimensional.

n-dimensionaler VR $\rightarrow \dim(V) = n$

(i) mehr als n Vektoren $\Rightarrow$ linear abhängig

(ii) weniger als n Vektoren $\Rightarrow$ nicht erzeugend

(iii) n Vektoren $\rightarrow$ genau dann linear unabhängig, wenn sie erzeugend sind

$\hookrightarrow$ dann bilden sie nämlich eine <u>Basis</u>

Koordinaten

$w = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n \rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sind die Koordinaten

$\rightsquigarrow$ vgl. Beispiel 1 und 2