Übungsstunde 5

Inverse einer Matrix

Definition: $A^{-1}A = \mathbb{I}_n$

Weiter gilt: $(A^{-1})^{-1} = A$; $(\mathbb{I}_n)^{-1} = \mathbb{I}_n$;

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Was bringt uns die Inverse?

→ Man braucht sie oft um rückwärts zu rechnen

↳ Bsp: $A = B \cdot C \rightarrow B = ? \Rightarrow A \cdot C^{-1} = B$

Um invertierbar zu sein, muss die Matrix quadratisch sein.

Regulär/Singulär

Matrix ist regulär/invertierbar, wenn sie eine Inverse besitzt.
Ansonsten ist sie singulär

Äquivalenz folgender Eigenschaften

A ist regulär $\Leftrightarrow$ $Ax = b$ für jedes b lösbar

$\Leftrightarrow$ HLGS $Ax = 0$ hat nur triv. Lsg $x = 0$

$\Leftrightarrow$ $\text{Rang}(A) = n$

A ist singulär $\Leftrightarrow$ $Ax = b$ hat unendlich-viele oder keine Lösungen

$\Leftrightarrow$ $Ax = 0$ hat unendlich-viele Lösungen

$\Leftrightarrow$ $\text{Rang}(A) < n$

Gauss-Jordan-Algorithmus

→ Berechne damit die Inverse einer Matrix

Beispiel:

Berechne die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}+\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

Ziel: Einheitsmatrix ↑ Inverse von A ↑

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{II}+\mathrm{III} \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I}+3\cdot\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

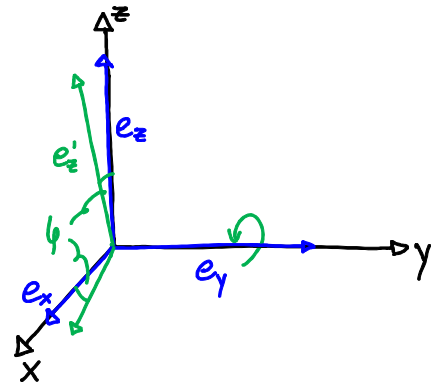
$$\rightarrow A^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$$

Givens-Rotation

Rotation um y-Achse und Winkel φ:

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc} & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{wird} & e_x' & e_y' & e_z' \end{array}$$



Orthogonale Matrizen

Definition: $A^T A = \mathbb{I}_n$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

↳ Es muss also gelten: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $a \cdot a + c \cdot c \overset{!}{=} 1$
- $a \cdot b + c \cdot d \overset{!}{=} 0$
- $b \cdot a + d \cdot c \overset{!}{=} 0$
- $b \cdot b + d \cdot d \overset{!}{=} 1$

$\Rightarrow$ für A: – Spalte mit sich selbst $\overset{!}{=} 1$
– Spalte mit anderer Spalte $\overset{!}{=} 0$