D-MAVT Lineare Algebra I
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 1

Aufgabe 1 ist online auf `https://echo.ethz.ch` zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 2. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool `https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s01`.

---

1. Gegeben sei das LGS (lineare Gleichungssystem)

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & y & = & a \\ x & + & ay & = & a \end{array}.$$

Welche Aussagen treffen zu?

(a) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

(b) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

(c) Für $a = -1$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.

(d) Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

(e) Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau zwei Lösungen.

2. Man löse die folgenden drei Gleichungssysteme mit dem Gauss–Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & b_2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 10x_4 & = & b_3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 10x_3 & + & 20x_4 & = & b_4 \end{array}$$

a) $b_1 = 1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 2$;

b) $b_1 = 0,\ b_2 = -3,\ b_3 = 2,\ b_4 = 1$;

c) $b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = 1,\ b_4 = 1$.

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mit dem Gauss–Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}.$$

4. Lösen Sie die Aufgaben **2** und **3** nochmals mit Hilfe von MATLAB.

5. (Fakultativ) Man zeige, dass zur Ausführung des Gauss-Verfahrens die Operation

(II) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

genügt.

(2)

$$\begin{array}{cccc|c|c|c} & & & & a & b & c \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c|c|c} & & & & a & b & c \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 18 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c|c|c|l} & & & & a & b & c & \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3 & 8 & 0 & \\ 0 & 0 & 5 & 12 & -5 & 10 & 0 & \left(-\frac{5}{2}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c|c|c} & & & & a & b & c \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & -10 & 0 \end{array}$$

a) $x_4 = \frac{5}{4}$; $x_3 = -4$; $x_2 = \frac{7}{2}$; $x_1 = 3$

b) $x_4 = -5$, $x_3 = 14$, $x_2 = -7$, $x_1 = -11$

c) $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 1$

(3)

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 2 & & 8 \\ 1 & 3 & -1 & & 2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 2 & & 8 \\ 0 & -5 & 5 & & 2 \end{array}$$

$\Rightarrow -5x_2 + 5x_3 = 2$

$\rightarrow \underline{x_2 = a} \Rightarrow \underline{x_3 = \frac{2}{5} + a}$

$\Rightarrow 3x_1 + 4a + \frac{4}{5} + 2a = 8$

$\Rightarrow \underline{x_1 = \frac{12}{5} - 2a}$

$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{ \begin{pmatrix} 12/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} a, a \in \mathbb{R} \right\}}}$

oder: $\underline{x_3 = b} \rightarrow \underline{x_2 = b - \frac{2}{5}}$

$\rightarrow 3x_1 + 4b - \frac{8}{5} + 2b = 8$

$\Rightarrow \underline{x_1 = \frac{16}{5} - 2b}$

$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{ \begin{pmatrix} 16/5 \\ -2/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} b, b \in \mathbb{R} \right\}}}$