D-MAVT Lineare Algebra I
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 2

Aufgabe 1 ist online auf `https://echo.ethz.ch` zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 9. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool `https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s02`.

---

1. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Jedes lineare Gleichungssystem mit der gleichen Anzahl von Gleichungen wie Unbekannten hat eine eindeutige Lösung. Nein, kann zB gleiche Information enthalten → $\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{array} \right|$

(b) Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens eine Lösung. Nein, zB: $0x_1 + 0x_2 = 1$ → keine Lsg

(c) Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung. Falsch

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

2. Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2bx_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & & & 4x_3 & = & 5 \\ & & 2bx_2 & + & 3ax_3 & = & b \end{array}$$

a) Lösungen mit *zwei* freien Parametern besitzt,

b) Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,

c) eindeutig lösbar ist,

d) keine Lösung hat

und geben Sie in jedem Fall die Lösungsmenge an.

3. *Dimensionsanalyse des Strömungswiderstands eines Schiffes*:
Im cgs-Masssystem gilt für die Einheiten:

Dichte des Wassers	$\rho:$	$cm^{-3}g^1sec^0$,
Schiffsgeschwindigkeit	$v:$	$cm^1g^0sec^{-1}$,
benetzte Oberfläche	$\mathcal{O}:$	$cm^2g^0sec^0$,
Schiffsmasse	$m:$	$cm^0g^1sec^0$,
Bremsverzögerung	$a:$	$cm^1g^0sec^{-2}$.

a) Welche Formeln des Typs

$$\rho^\alpha v^\beta \mathcal{O}^\gamma m^\delta a^\varepsilon = K$$

sind vom Masssystem her möglich, wenn K eine dimensionslose Zahl sein soll?

b) Welche Formeln ergeben sich für die Widerstandskraft $F = ma$?

Bemerkung: Die gefundene Lösung ist bei Schiffbauingenieuren tatsächlich in Gebrauch.

4. Gegeben seien die zwei linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit dem Gauss–Algorithmus die Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme.

b) Lösen Sie die Aufgabe nochmals mit Hilfe von MATLAB.

② $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2b & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2b & 3a & b \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2b & 4 & 5 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 3a & b \end{array}\right)$

$b=0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

i) $a=0 \Rightarrow$ 2 freie Parameter, $L=\left\{\begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c,d \in \mathbb{R}\right\}$

ii) $a \neq 0 \Rightarrow$ 1 freier Parameter $L=\left\{\begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$

$b \neq 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2b & 4 & 5 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 3a & b \end{array}\right)$

i) $a=0 \Rightarrow$ keine Lösung $\rightarrow L=\{\emptyset\}$

ii) $a \neq 0 \Rightarrow$ eindeutige Lsg $\rightarrow L=\left\{\begin{pmatrix} \frac{5}{3}-\frac{4b}{3a} \\ 0 \\ b/3a \end{pmatrix}\right\}$

a) $a=0, b=0$

b) $a \neq 0, b=0$

c) $a \neq 0, b \neq 0$

d) $a=0, b \neq 0$

③ cm: $-3\alpha + 1\beta + 2\gamma + 0 + 1\varepsilon = 0$

g: $1\alpha + 0 + 0 + 1\delta + 0 = 0$

sec: $0 - 1\beta + 0 + 0 - 2\varepsilon = 0$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \delta = s;\ \varepsilon = t$ (freie Param.) mit $s,t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underline{\gamma} = -\frac{3s-t}{2} = \underline{\frac{t}{2} - \frac{3}{2}s}$

$\underline{\beta = -2t}$

$\underline{\alpha = -s}$

$\Rightarrow \underline{\underline{K = \rho^{-s} v^{-2t} D^{\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}s} m^s a^t}}$ mit $s,t \in \mathbb{R}$

b) $F = m \cdot a \rightarrow s = t = 1 \rightarrow K = \rho^{-1} v^{-2} D^{-1} m^1 a^1$

$\Rightarrow \underline{\underline{F = m \cdot a = K \rho v^2 D}}$

④ a)

$$\begin{array}{ccc|c|c} & & & b_1 & b_2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c|c} 1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & -1 & -6 \end{array} \quad \oplus \cdot (3)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|c|c} 1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -8 & -4 & -12 \end{array}$$

1) $\underline{b_1}$: $\underline{x_3 = a} \rightarrow 4x_2 + 8a = 4 \Rightarrow \underline{x_2 = 1 - 2a}$

$\rightarrow x_1 - 2 + 4a - 3a = -1 \Rightarrow \underline{x_1 = 1 - a}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}}}$$

2) $\underline{b_2}$: $\underline{x_3 = a} \rightarrow 4x_2 + 8a = 12 \Rightarrow \underline{x_2 = 3 - 2a}$

$\rightarrow x_1 - 6 + 4a - 3a = -2 \Rightarrow \underline{x_1 = 4 - a}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}}}$$