D-MAVT Lineare Algebra I
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 3

Aufgabe 1 ist online auf `https://echo.ethz.ch` zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 16. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool `https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s03`.

---

1. Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix}]\Theta] \\ \\ \hookleftarrow \end{matrix}$$

$b_1 - b_2 \neq b_3 \Rightarrow \underline{\underline{b_3 + b_2 - b_1 \neq 0}}$

und der Vektor

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ ist das LGS $Ax = b$ lösbar?

(a) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Für keine $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

(c) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ mit $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

(d) Für alle $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ mit $b_3 + b_2 - b_1 \neq 0$.

(e) Das lässt sich nicht entscheiden.

2.

~~a)~~ Für welche Werte von t schneiden sich die vier Ebenen im $\mathbb{R}^3$?

Gauss

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 2t \\ 2(x & - & y) & + & t(z+1) & = & 0. \end{array}$$

b) Das folgende MATLAB-Script visualisiert die Lösung des LGS $x + y - z = 5$, $x - y - z = 0$, $4x - z = 2$.

MATLAB

```
ezsurfc('x+y-5')
% plottet den Graphen der Funktion z=f(x,y)=x+y-5 (Sie koennen
% auch andere (zwei) Variabelnamen waehlen)
hold on
% hold dient dazu, alle Graphen in derselben Figur anzuordnen
% (Figur nicht schliessen waehrend dem Ausfuehren der Befehle)
ezsurfc('x-y')
ezsurfc('4*x-2')
hold off
```

Ändern Sie dieses Script so ab, dass es für die im Teil **a)** gefundenen Werte von t den Schnitt der vier Ebenen visualisiert.

3.

a) Lösen Sie für $n \geq 2$ das lineare Gleichungssystem

iterieren und in Matrixform schreiben

$$\sum_{i=1}^{n} (i-k)x_i = 1 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

b) Lösen Sie für $n \geq 1$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \\ y_{n+1} = 1 \end{array}$$

4. *Numerische Problematik bei linearen Gleichungssystemen:*

a) Lösen Sie

$$\begin{pmatrix} 1044.005 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

b) "Lösen" Sie mit einem gewöhnlichen Taschenrechner

$$\begin{pmatrix} 1044.0045 & 696.0028 \\ 174.0008 & 116.0005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696.0034 \\ 116.0006 \end{pmatrix}.$$

c) Zeigen Sie, dass jedes $\binom{x}{y}$, das zur Lösungsmenge beider Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1044 & 696 \\ 174 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 116 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 45 & 28 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gehört, auch eine Lösung von **b)** ist und lösen Sie damit **b)**.

② a)
$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2t \\ 2 & -2 & t & -t \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (\mathrm{III}-\tfrac{1}{2}\mathrm{I}) \\ (\mathrm{IV}-\mathrm{I}) \end{array}$$

$\rightarrow$ t, sodass sich Ebenen schneiden

$\Rightarrow$ löse System und finde t

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 2t \\ 0 & -1 & t-1 & -t \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (\mathrm{III}-\tfrac{3}{2}\mathrm{II}) \\ (\mathrm{IV}+\mathrm{II}) \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2t \\ 0 & 0 & t & -t \end{array}$$

VB: $-2x_3 = 2t \Rightarrow x_3 = -t$

und $x_3 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{t=1}}$

$\Rightarrow x_3 = -1;\ x_2 = 1;\ x_1 = 1$

ODER: $\underline{\underline{t=0}}$

$\Rightarrow x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 = 0$

③ a)

	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	1
$k=1$:	0	1	2	$\cdots$	$(n-1)$	1
$k=2$:	-1	0	1	$\cdots$	$(n-2)$	1
$k=3$:	-2	-1	0	$\cdots$	$(n-3)$	1
$\vdots$		-	-	-	-	$\vdots$
$k=n$:	$(1-n)$	$(2-n)$	$(3-n)$	$\cdots$	0	1

jeweils obere Glg abziehen $\longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	1
0	1	2	$\cdots$	$(n-1)$	1
-1	-1	-1	$\cdots$	-1	0
-1	-1	-1	$\cdots$	-1	0
	-	-	-	-	$\vdots$
-1	-1	-1	$\cdots$	-1	0

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	1
1	1	1	$\cdots$	1	0
0	1	2	$\cdots$	$(n-1)$	1

b)

$y_0 = 0$

$y_0 - 2y_1 + y_2 = 0$

$y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$

$y_2 - 2y_3 + y_4 = 0$

$\vdots \qquad \vdots$

$y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} = 0$

$y_{n+1} = 1$

$\rightarrow$

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	$\cdots$	y_n	y_{n+1}	1
1	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	0
1	-2	1	0	0	$\cdots$	0	0	0
0	1	-2	1	0	$\cdots$	0	0	0
0	0	1	-2	1	$\cdots$	0	0	0
		-	-	-	-			$\vdots$
0	0	0	0	0	$\cdots$	-2	1	0
0	0	0	0	0	$\cdots$	0	1	1