

## Serie 4

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 23. Oktober um 14:00 Uhr** ab.  
 Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s04>.

---

1. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (a)  $(AB)^T = A^T B^T$ .
- (b)  $(AB)^T = B^T A^T$ . *Beachte die Dimensionen der Matrizen*
- (c)  $A^T A$  ist symmetrisch.
- (d)  $AA^T$  ist symmetrisch.
- (e) Ist  $C$  eine beliebige quadratische Matrix, so ist  $C + C^T$  symmetrisch.

a)  $(A \cdot B)^T = ([2 \times 3] \cdot [3 \times 2])^T = [2 \times 2]^T = [2 \times 2]$   
 $A^T B^T = ([3 \times 2] \cdot [2 \times 3]) = [3 \times 3]$

b)  $B^T A^T = ([2 \times 3] \cdot [3 \times 2]) = [2 \times 2] \rightarrow \text{nicht möglich}$

c)  $A^T A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 & * & * \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$

*→ rot und grün gleich  
 → weiter überprüfbar, dass auch blau und grün gleich ist, Diag. egal  
 → symmetrisch!*

d) vgl. mit c)

3

e)  $\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_{11} & C_{12} + C_{21} \\ C_{21} + C_{12} & 2C_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \text{gelb gleich} \Rightarrow \text{symmetrisch}$

$$A \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \textcolor{blue}{0} \\ \textcolor{green}{0} \\ \textcolor{red}{0} \end{pmatrix}; A x = \begin{pmatrix} \textcolor{yellow}{1} \\ \textcolor{red}{4} \\ \textcolor{green}{-3} \end{pmatrix}$$

2. Gegeben sind die Matrizen

vgl. Übungs-  
stunde letzte  
Woche

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bilden Sie, sofern definiert, die folgenden Matrixprodukte:
- $$AB, BA, Ax, A^2 := AA, B^2 := BB, y^T x, yx, xy^T, B^T y, y^T B.$$
- b) Lösen Sie a) nochmals mit Hilfe von MATLAB.

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(-6 \quad -1)$$

### 3. Polynominterpolation:

Gegeben sind die Funktionswerte  $y_0, y_1, \dots, y_n$  über den Abszissen  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .  
Gesucht ist das interpolierende Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Es soll also gelten

$$p(x_i) = y_i, \quad \text{für } 0 \leq i \leq n.$$

- a) Man bestimme das Gleichungssystem für die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  in Matrixschreibweise.
- b) Man bestimme das Interpolationspolynom für

$x_i$	0	1	2	3	4
$y_i$	0	1	0	2	0

( $n = 4$ ).

- c) Man betrachte die Polynome

$$\ell_i(x) := \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Welche Werte nimmt  $\ell_i$  in den Punkten  $x_k$  an? Man bestimme die Lösung von b) mit Hilfe der Polynome  $\ell_i$  (Lagrangesche Interpolationsformel).

### 4. Kirchhoffsche Regeln:

Für elektrische Stromkreise gelten die folgenden Regeln:

- Die Summe der Teilströme in jedem Knoten ist Null.
- Die Summe der Teilspannungen in jeder Masche ist Null.

Bestimmen Sie das lineare Gleichungssystem für die fünf Teilströme des skizzierten Gleichstromkreises und lösen Sie es für

$$R = 300\Omega, \quad U = V = 300V, \quad W = 200V.$$

Hinweis: Wählen Sie die Vorzeichen entsprechend den Zählpfeilen!

$$③ \text{ a) } p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Es soll gelten:  $p(x_i) = y_i$  für  $0 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} & \hookrightarrow a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ & a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \quad \rightarrow A \cdot a = y \\ & \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 & y_0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 & y_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 & y_4 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{ccccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & y_2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & y_3 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & y_4 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{Gauß}} a_4 = -\frac{1}{2}, a_3 = \frac{23}{6}, a_2 = -9, a_1 = \frac{20}{3}, a_0 = 0$$

$$\hookrightarrow p(x) = \frac{20}{3}x - 9x^2 + \frac{23}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4$$

$$\text{c) } l_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{mit } 0 \leq i \leq n \quad (\text{von Aufgabe})$$

$$\hookrightarrow l_0(x) = \prod_{j=1}^n \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \cdot \frac{x - x_4}{x_0 - x_4} \quad (\text{Setze bspw. } i=0)$$

$$\hookrightarrow l_0(x)$$

$$l_i(x_0) \rightarrow x = x_0: l_0(x_0) = 1$$

$$x = x_1: l_0(x_1) = 0$$

$$x = x_2: l_0(x_2) = 0$$

(Dirac-Teil, wobei  $l_i(x_k)$  für  $i=k: 1$ , sonst 0)

$$\hookrightarrow l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } i=k \\ 0 & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=k \\ 0 & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

\* sozusagen andere Dirac-Schreibweise

$$\rightarrow l_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^n \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \cdot \frac{x - x_4}{x_1 - x_4} \quad (\text{Setze bspw. } i=1)$$

$$\hookrightarrow l_1(x)$$

$$\hookrightarrow l_1(x_1) = 1; l_1(x_0) = l_1(x_2) = l_1(x_3) = l_1(x_4) = 0$$

(Muster ersichtlich mit Dirac)

$$\hookrightarrow A = \begin{pmatrix} l_0(x_0) & l_0(x_1) & l_0(x_2) & l_0(x_3) & l_0(x_4) \\ l_1(x_0) & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ l_4(x_0) & l_4(x_1) & l_4(x_2) & l_4(x_3) & l_4(x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_5$$

(Als Matrix würde dies so aussehen)

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

Das Polynom, welches wir berechnen wollen

↳ kommt von Lagrangesche Interp. Formel

$$\hookrightarrow L(x_k) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x_k) = \sum_{i=0}^n y_i \delta_{ik} = y_k \quad *$$

$$\hookrightarrow k=0: y_0 l_0(x_0) + y_1 l_1(x_0) + y_2 l_2(x_0) + y_3 l_3(x_0) + y_4 l_4(x_0) = y_0$$

$$\Rightarrow L(x) = \sum_{i=0}^4 y_i l_i(x) = l_1(x) + 2l_3(x)$$

(Wir können also Werte von 3b einsetzen)

$$\text{mit: } l_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^n \frac{x-x_j}{x_1-x_j} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \cdot \frac{x-x_3}{x_1-x_3} \cdot \frac{x-x_4}{x_1-x_4}$$

$$= \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-3}{1-3} \cdot \frac{x-4}{1-4} = \frac{x(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)} = -\frac{1}{6} x(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$l_3(x) = \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-2}{3-2} \cdot \frac{x-4}{3-4} = -\frac{1}{6} x(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$\rightarrow L(x) = l_1(x) + 2l_3(x)$$

$$= -\frac{1}{6} x(x-2)(x-3)(x-4) + 2 \cdot \left( -\frac{1}{6} x(x-1)(x-2)(x-4) \right)$$

$$= -\frac{1}{2} x^4 + \frac{23}{6} x^3 - 9x^2 + \frac{20}{3} x$$

Was brauchen wir wirklich? → eine kleine Zusammenfassung:

- $L(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$

- $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$  mit  $0 \leq i \leq n$

- Da  $y_0 = y_2 = y_4 = 0 \rightarrow$  nur  $l_1(x)$  und  $l_3(x)$  notwendig

$$\rightarrow L(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x) = y_1 l_1(x) + y_3 l_3(x) =$$

$$\textcircled{2} \quad a) \quad xy^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 6 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 4 \ -3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & 6 \\ 4 & 16 & -12 \end{pmatrix}$$

$[3 \times 1] \cdot [1 \times 3] \rightarrow [3 \times 3]$

$$\textcircled{3} \quad a) \quad \left| \begin{array}{cccc|c} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 1 \\ 1 & x_0 & \cdots & x_n & y_0 \\ 1 & x_1 & \cdots & x_n & y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n & y_n \end{array} \right|$$

b) Werte einsetzen, Gaußsen, Rückwärtseinsetzen

