D-MAVT Lineare Algebra I
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 5

Aufgabe 1 ist online auf `https://echo.ethz.ch` zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 30. Oktober um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool `https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s05`.

---

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

→ solange $b \neq 0$ → sonst triv. Lsg

(a) Seien u und v Lösungen des LGS $Ax = b$ mit n Unbekannten. Der Rang des LGS sei r. Falls $n = r$ gilt, so folgt $u = v$. → kein freier Parameter!

(b) Sei $Ax = 0$ ein HLGS und $x \neq 0$ eine Lösung davon. Dann ist der Rang r des Gleichungssystems gleich der Anzahl n der Unbekannten.
↳ freie Param. möglich!

(c) Sei $Ax = b$ ein LGS, das keine Lösung besitzt. Dann ist der Rang r grösser als die Anzahl m der Gleichungen. ↳ $r > n$ ↳ $r > m$ nicht möglich!
↳ r immer: $r \leq m$

(d) Sei $Ax = b$ ein LGS mit n Unbekannten und ebensovielen Gleichungen. $u \neq 0$ sei eine Lösung des HLGS $Ax = 0$ und v eine Lösung von $Ax = b$. Dann hat $Ax = b$ noch unendlich viele weitere Lösungen.

$m = n$ HLGS nichttriv. Lsg $\Rightarrow r < n = m$
↳ freier Parameter

2. Bestimmen Sie – in Abhängigkeit von a – den Rang des folgenden Gleichungssystems mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & + & (a^2+3a)x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

3. Bestimmen Sie, welche Matrizen B mit der Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ kommutieren, d.h. für welche B die Gleichung $AB = BA$ gilt.

②
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & (a^2+3a) & 0 \\ -2 & -1 & a & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}+2\cdot\mathrm{I} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & a^2+3a-1 & 0 \\ 0 & 1 & a+6 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}+\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}+\mathrm{II} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+3a-4 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+3a-4 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$

$\rightarrow a^2+3a-4=0 \Leftrightarrow (a+4)(a-1)=0 \Rightarrow a_1=-4,\ a_2=1$

$\Rightarrow \text{Rang } r = \begin{cases} 3 & \text{wenn } a\in\{-4,-1,1\} \\ 4 & \text{sonst} \end{cases}$

---

③ $\rightarrow$ B muss 2x2 Matrix sein $\rightarrow B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+2b_3 & b_2+2b_4 \\ 3b_3 & 3b_4 \end{pmatrix}$

und $BA = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 2b_1+3b_2 \\ b_3 & 2b_3+3b_4 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Damit $AB=BA$: 1) $b_1+2b_3=b_1 \Rightarrow b_3=0$

2) $b_2+2b_4 = 2b_1+3b_2$

3) $3b_3=b_3 \Rightarrow b_3=0$

4) $3b_4 = 2b_3+3b_4$

$\Rightarrow$ 1) $b_3=0$
2) $2b_4 = 2b_1+2b_2$ $\Rightarrow b_3=0$ und $b_4=b_1+b_2$
4) $3b_4=3b_4$

$\Rightarrow B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1+b_2 \end{pmatrix}$ vgl. mit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1+2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ B muss also ein Vielfaches von A sein

$\hookrightarrow$ Wenn $B=\lambda\cdot A \Rightarrow A\cdot B = A\cdot\lambda\cdot A = \lambda\cdot A\cdot A = B\cdot A$

4. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^3$. Dann ist das Vektorprodukt von x und y definiert als

$$x \times y := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine 3×3-Matrix B so, dass

$$x \times y = By.$$

b) Zeigen Sie, dass $x \times y$ senkrecht auf x und y steht.

c) Rechnen Sie eine der folgenden Identitäten nach:

$$\begin{aligned} &a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c && \text{(Grassmann)} \\ &a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0 && \text{(Jacobi)} \\ &(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d) && \text{(Lagrange)} \end{aligned}$$

d) Verwenden Sie die Lagrange-Identität um zu zeigen, dass

$$\|a \times b\| = \|a\|\|b\| \sin \varphi$$

gilt, wobei $0 \leq \varphi \leq \pi$ der von a und b eingeschlossene Winkel ist. Dieser Satz besagt, dass die Länge des Vektors $a \times b$ gleich der Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms ist.

Hinweis: Es gilt

$$a \cdot b = \|a\|\|b\| \cos \varphi.$$