

## Serie 6

Aufgabe 1 ist online auf <https://echo.ethz.ch> zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 6. November um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool <https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s06>.

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Sei  $A$  symmetrisch und regulär. Dann ist auch  $A^{-1}$  symmetrisch.

$$\hookrightarrow A \text{ sym.} \Rightarrow A^T = A, \text{ weil } A \text{ reg.} \Rightarrow A^{-1} \text{ möglich}$$

(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{a}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Dann ist  $A$  genau für  $a = \pm\sqrt{3/2}$  orthogonal.

$$\hookrightarrow \text{siehe ZF, oder: } A^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Ja

$$\hookrightarrow a = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

(c) Es gibt orthogonale Matrizen, die singulär sind.

$$\downarrow A^{-1} = A^T \Rightarrow \text{regulär} \Rightarrow \text{Nein}$$

$$\cdot \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} \cdot 2 = 1$$

$$\hookrightarrow a = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\cdot \langle a^{(3)}, a^{(3)} \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow \checkmark$$

$$\cdot \langle a^{(1)}, a^{(2)} \rangle = \frac{a}{2\sqrt{2}} - \frac{a}{4\sqrt{2}} - \frac{a}{4\sqrt{2}} = 0 \rightarrow \checkmark$$

...  
...

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass  $A$  regulär ist.

b) Für welche Werte des Parameters  $\gamma$  ist

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \gamma & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

singulär?

?) a) regulär, wenn Gauß keine NZ ergibt

$$\hookrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow Ax=b$  hat eindeutige Lsg

und ist für jedes b lösbar

$\Rightarrow A$  regulär

$$\text{b) } \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & \gamma & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & \gamma & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2\gamma & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \gamma = 4 \rightarrow \text{NZ} \\ \gamma = -2 \rightarrow \text{NZ}$$

$\Rightarrow B$  singulär für  $\gamma = -2$  und  $\gamma = 4$

3. Sei  $\mathbb{I}_2$  die  $2 \times 2$ -Einheitsmatrix und  $u = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})^T$ .

a) Für welche Werte des Parameters  $\alpha$  ist die Matrix  $V := \mathbb{I}_2 - \alpha u u^T$  orthogonal?

b) Lösen Sie für die in a) ermittelten Werte von  $\alpha$  das Gleichungssystem

$$Vx = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ohne den Gauss-Algorithmus zu benutzen.

c) Kontrollieren Sie a) und b) mit MATLAB.

4. Gegeben sei die  $2 \times 2$ -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

a) Für welche  $a, b, c, d$  ist  $A$  regulär?

b) Bestimmen Sie für die in a) ermittelten Werte von  $a, b, c, d$  die Inverse  $A^{-1}$ .

$$\textcircled{3} \quad u = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \rightarrow u \cdot u^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{a)} \quad V = \mathbb{I}_2 - \alpha u \cdot u^T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{4} \cdot \alpha & -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \alpha \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \alpha & 1 - \frac{1}{4} \cdot \alpha \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \text{orthogonal: } \langle v^{(1)}, v^{(1)} \rangle = \left(1 - \frac{3}{4} \alpha\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \alpha\right)^2 \stackrel{!}{=} 1$$

$$\hookrightarrow 1 - \frac{3}{2} \alpha + \frac{9}{16} \alpha^2 + \frac{3}{16} \alpha^2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 0}} \rightarrow V = \mathbb{I}_2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \alpha \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 2}}$$

$$\hookrightarrow V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Prüfe: } \langle v^{(1)}, v^{(2)} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \rightarrow \checkmark$$

$$\text{und } \langle v^{(2)}, v^{(2)} \rangle = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \rightarrow \checkmark$$

$$\text{b) Löse } Vx = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \textcircled{5} \quad V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ für } \alpha = 2 \quad \hookrightarrow \text{Sieht ja verdächtig simpel aus...}$$

$$\text{Für } \alpha = 0: \quad \underline{\underline{x = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}}$$