D-MAVT Lineare Algebra I
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 8

Aufgabe 1 ist online auf `https://echo.ethz.ch` zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 20. November um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool `https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s08`.

---

1. Bestimmen Sie das Produkt $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Berechnen Sie

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{2}{15} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ \frac{50}{15} & 4/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{4}{15} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ \frac{46}{15} & 8/5 \end{pmatrix}$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{7}{10} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ \frac{7}{9} & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -\frac{46}{15} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -16 \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

(e) Keine der genannten Möglichkeiten.

3. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I+II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

oder: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{1\cdot 1 - 0\cdot(-1)}_{=1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

(c) Die Matrix ist nicht invertierbar.

4. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\rightsquigarrow 3\times 2$

$\rightsquigarrow 3\times 1$

$\Rightarrow$ Dim. muss 2×1 sein

Aus dieser möchten wir die erste Spalte extrahieren. Das heisst, das Produkt von rechts oder links mit einer weiteren Matrix ist die erste Spalte von A. Für welche der folgenden Möglichkeiten ist dies gegeben?

(a) Multiplikation von links mit $\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Multiplikation von rechts mit $\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

(c) Multiplikation von links mit $\cancel{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

(d) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\rightarrow (2\times 1)\cdot(3\times 2) \rightarrow \lightning$

(e) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Sei A eine 4×4-Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) $Ax = b$ hat für jedes b höchstens eine Lösung. $\Rightarrow \ker(A) = 0 \Rightarrow$ invertierbar

ii) $Ax = b$ hat für jedes b mindestens eine Lösung. $\Rightarrow$ voller Rang $\Rightarrow$ invertierbar

(a) Richtig.

(b) Falsch.

$\Rightarrow$ Es geht um die Äquivalenz der beiden Aussagen und nicht ob sie immer gültig sind!
$\hookrightarrow$ für jedes A

6. Für die reelle Matrix

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \lightning$$

und den reellen Vektor $b = (1, 2, 0)^\top$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ...

Lin. kombi

$x_2 = 2$

$\hookrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \lightning$

(a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

7. Sei A eine 2×3-Matrix. Dann existiert eine 3×2-Matrix B, welche nicht die Nullmatrix ist, aber trotzdem gilt $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$AB = \begin{pmatrix} \text{Summe} & \text{Summe} \\ \text{Summe} & \text{Summe} \end{pmatrix}$

(a) Richtig.

(b) Falsch.

$A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix}$ z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. Für die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ gleiche Matrix wie Afg. 6

hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ ...

(a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

$\hookrightarrow$ gibt Nullzeile

$\hookrightarrow$ freier Parameter

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

9. Für die reelle Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & -12 & a^2-7 \\ 0 & -1 & 7a+5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+2\cdot\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -10 & a^2-9 \\ 0 & -1 & 7a+5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{IV}-\text{II}]{2\cdot\text{II}+\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+1 \\ 0 & 0 & 7a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 7a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+1 \end{pmatrix}$$

gilt:

(a) Für $a = 1$ ist B nicht invertierbar.

(b) Rang $B \geq 3 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

↳ nicht mehr als eine NZ mögl.

(c) Für $a = 0$ ist $\det B = 0$.

(Da Nullzeile)

$a=1$: $7a \to 7$ und $a^2+1 \to 2$

↳ keine NZ

10. Der Rang von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{I}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

beträgt...

(a) 0.

↳ eine NZ

(b) 1.

↳ Rang $\sigma = 2$

(c) 2.

(d) 3.

(e) 4.

11. Seien A, B zwei symmetrische Matrizen. Dann ist das Produkt AB auch symmetrisch.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ⇝ EV. ZF ergänzen!

(a) Richtig.

(b) Falsch.

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ → nicht sym.!

12. Gegeben sei eine orthogonale Matrix A mit Inverse A^{-1}. Dann gilt:

(a) $A^{-1} = A^T$

(b) $A^{-1} = 2A$

(c) $A^{-1} = -A$

(d) Die Inverse existiert nicht.

(e) Keine der genannten Möglichkeiten.

13. Gegeben seien:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$A^1 A^T \neq \mathbb{I}_2$

(a) A_1 ist nicht orthogonal.

(b) A_2 ist nicht orthogonal aber die inverse A_2^{-1} ist es. Matrix orth. $\Leftrightarrow$ Inverse orth.

14. Gegeben seien:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$A^T A = \mathbb{I}$ (25

bspw. $\frac{1}{55}\underbrace{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}_{9+16} = \frac{1}{25}\cdot 25 = 1$

Dann gilt:

(a) A_1 ist orthogonal. $A_1^T \cdot A_1 \neq \mathbb{I}_2$

(b) A_2 ist orthogonal. Braucht $\ominus$ in zweiter Spalte

(c) Keine der genannten Möglichkeiten.

15. Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $m > n$, so dass $A^\top A$ die Einheitsmatrix $\mathbf{I}_n$ ist. Dann gilt:

(a) A ist orthogonal und $\|A\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(b) A ist nicht orthogonal, aber trotzdem gilt $\|A\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Sei B eine $n \times m$-Matrix, so dass BA orthogonal ist. Dann ist auch AB orthogonal.

A ist nicht quadratisch

$\hookrightarrow$ A ist nicht orthogonal!

- aber $\rightarrow$ $A^T A = \mathbb{I}$
- $\|BC\| = \sqrt{(BC)^T BC}$ $\quad (BC)^T = C^T B^T$

a) A ist nicht quadr.

b) $\|Ax\| = \sqrt{(Ax)^T A x} = \sqrt{x^T \underbrace{A^T A}_{=\mathbb{I}} x} = \sqrt{x^T x} = \|x\|$

c) Bsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = A^T \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbb{I}_3$

16. Gegeben sei die $n \times n-$Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 1 & & * \\ \vdots & \vdots & & \\ n & 1 & & \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{II} - (2)\cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - (3)\cdot \mathrm{I} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & -1 & * \\ 0 & -2 & \\ & * & * \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 2 & 1 & 0 & \ddots \\ 3 & & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

wobei nur die ersten beiden Spalten bekannt sind. Angenommen es existiert eine LR-Zerlegung $LR = A$, was können Sie darüber aussagen?

Da Minus verwendet werden muss!

(a) Die erste Spalte von L ist $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & \cdots & -n \end{pmatrix}^T$.

(b) Die erste Spalte von L ist $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & \cdots & -n \end{pmatrix}^T$.

(c) Die erste Spalte von L ist gleich der ersten Spalte von A.

(d) Man muss die gesamte Matrix A kennen um die erste Spalte von L zu bestimmen.

(e) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 0.

(f) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 1.

$r_{22} = -1$

(g) Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 3.

(h) Man muss die gesamte Matrix A kennen um den Eintrag r_{22} der Matrix R zu bestimmen.