D-MAVT Lineare Algebra I
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 11

Aufgabe 1 ist online auf `https://echo.ethz.ch` zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 11. Dezember um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder per Sam-Uploadtool `https://sam-up.math.ethz.ch/?lecture=401-0171-00&serie=s11`.

---

1. Betrachten Sie die Menge $\mathbb{R}_+^2 := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ der Paare positiver, reeller Zahlen.

Die Addition auf $\mathbb{R}_+^2$ sei folgendermassen definiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

Im Folgenden betrachten wir drei verschiedene Definitionen der Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. Definition.: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$
2. Definition.: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 \\ e^\lambda x_2 \end{pmatrix}$
3. Definition.: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix}$

Welche der folgenden Behauptungen sind korrekt?

$\mathbb{R}_+^2$ ist ein Vektorraum mit der oben definierten Addition und Multiplikation mit einem Skalar gemäss der…

(a) 1. Definition.

(b) 2. Definition.

(c) 3. Definition.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

1) Falsch, falls $\lambda < 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}_+^2$

2) $\lambda(x+y) = \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 y_1 \\ e^\lambda x_2 y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 e^\lambda y_1 \\ e^\lambda x_2 e^\lambda y_2 \end{pmatrix} = \lambda x + \lambda y \Rightarrow$ Falsch

3) $\lambda(x+y) = \begin{pmatrix} x_1^\lambda y_1^\lambda \\ x_2^\lambda y_2^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1^\lambda \\ y_2^\lambda \end{pmatrix} = \lambda x + \lambda y$

2. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ Spaltenvektoren. Das *Spatprodukt* dieser drei Vektoren ist dann definiert als

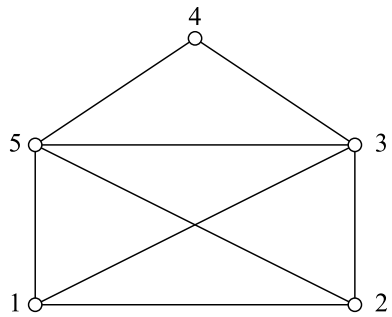
$$S(a, b, c) := (a \times b) \cdot c.$$

a) Beweisen Sie, dass $S(a, b, c) = \det(a, b, c)$ gilt.

b) Beweisen Sie, dass $|S(a, b, c)|$ das Volumen des von a, b und c aufgespannten Parallelepipeds (Spat) ist.

c) Was sagt das Vorzeichen von $S(a, b, c)$ aus?

3. Wir interpretieren den Graphen G



aus Serie 10, Aufgabe 4 als elektrisches Netzwerk, wobei jede Kante einem Widerstand von $R_0 = 1\,\Omega$ entspricht. Berechnen Sie den Widerstand R zwischen den Knoten 1 und 5 mit Hilfe der Formel $R = R_0 \frac{\tau_{15}}{\tau}$, wobei τ die Anzahl der aufspannenden Bäume von G ist und τ_{15} die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 enthalten. Verwenden Sie dazu die Formel aus Serie 10, Aufgabe 4.

Hinweis: Die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 *nicht* enthalten, ist gleich der Anzahl der aufspannenden Teilbäume des Graphen, den man erhält, wenn man die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 löscht.

2 a) $(a \times b) \cdot c = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$= c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2 (a_3 \cdot b_1 - a_1 b_3) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$

$= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \det(a, b, c)$

c) Rechte-Hand-Regel erfüllt, wenn $S(a,b,c) > 0$

4.

a) Für die Vandermonde-Determinante gilt die Formel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Verifizieren Sie diese Formel für $n = 3$.

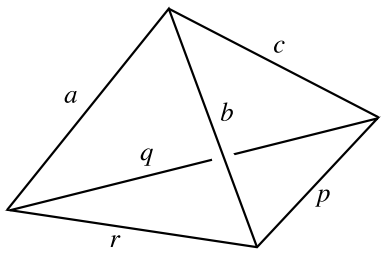
b) Für die Fläche eines ebenen Dreiecks mit den Seiten a, b, c gilt bekanntlich die Flächenformel von Heron:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Man kann zeigen, dass die Formel

$$F^2 = -\frac{1}{16} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

denselben Wert für F ergibt. Für das Volumen V eines Tetraeders mit den Kantenlängen a, b, c, p, q, r



gilt eine ähnliche Formel, nämlich

$$V^2 = \frac{1}{2^5 3^2} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & r^2 & q^2 & 1 \\ b^2 & r^2 & 0 & p^2 & 1 \\ c^2 & q^2 & p^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welchen Inhalt hat das Tetraeder mit den Kantenlängen $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $p = 4$, $q = 3$ und $r = 2$?

④ b) $V^2 = \frac{1}{2^5 3^2} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Weil ähnlich (keine Zeilenvertauschung)

$\hookrightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I-II} \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{SI-SII} \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 16 & 1 \\ 0 & 9 & 16 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

auch hier machen wir das um die Berechnung zu vereinfachen

Schachbrett

$= -2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 16 & 1 \\ 9 & 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

II−I und III−I

nach 1. Zeile entwickeln

$= -2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 & 1 \\ 4 & -4 & 7 & 0 \\ 9 & 12 & -9 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 16 & 1 \\ 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

nach letzter Spalte entwickeln

$= -2 \cdot (-1) \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 9 & 12 & -9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & 16 & 1 \\ 16 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sarrus Sarrus

$= 2 \cdot (48 + 36 + 63 - 84 + 36 + 36) - (16 + 16)$

$= 270 - 32 = 238$

$\Rightarrow V^2 = \frac{1}{2^5 \cdot 3^2} \cdot 238$

$\Rightarrow \underline{V} = \sqrt{\frac{1}{2^5 \cdot 3^2} \cdot 238} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 238} = \underline{\underline{\frac{1}{12} \cdot \sqrt{119}}}$