Elektrostatik

$$\vec{F} = e_1 e_2 \frac{\vec{r}}{4\pi r^3}$$

$$\vec{E}(x) = e\frac{\vec{x}}{4\pi r^3}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3y\, \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$\rho(\vec{x}) \xrightarrow[|\vec{x}|\to\infty]{} 0 \quad , \text{ glatt}$$

Gaussches Gesetz

$$\int_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_V d^3x\, \rho(\vec{y})$$

Feldgleichung

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0$$
$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho$$
$$\Delta\varphi = -\rho$$

Potentialproblem

$$\Delta\varphi = -\rho$$
$$\varphi|_{\partial D} = \psi$$
$$\varphi(\vec{x}) \xrightarrow[|\vec{x}|\to\infty]{} 0$$

Lösung eindeutig

geerdet $\Rightarrow \psi = 0$

Punktladung

$$\rho(\vec{x}) = e\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

Dipol

$$\rho(\vec{x}) = -\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\delta(\vec{x}) = -\operatorname{div}\vec{P}(x)$$

P dipoldichte, $\vec{p} = d^3x\, P$

$$\varphi = -\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{4\pi r}$$

$$\varphi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{4\pi r^3} \qquad \vec{p} = \int d^3x\, x\rho(x)$$

Oberflächenladung

$$\rho(\vec{x}) = \int_S do\, \sigma(\vec{y})\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

Leiter

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = 0 \quad \text{im Ggw}$$

$$(\vec{\nabla}\varphi)\cdot\vec{n} = \sigma \qquad \vec{n} \text{ in Leiter}$$

Lösung Dirichlet Potentialproblem

$$\varphi(\vec{x}) = \int_D \rho(\vec{y})G(\vec{y},\vec{x})\,d^3y - \int_{\partial D}\psi(\vec{y})\,\vec{\nabla}_y G(\vec{y},\vec{x})\cdot d\vec{o}$$

Elektrostatische Energie

$$W = \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, d^3y\, \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \int d^3x\, \rho(x)\varphi(x)$$

$$W = \frac{1}{2}\int d^3x\, \vec{E}^2 \quad , \quad u(x) = \frac{1}{2}\vec{E}^2(\vec{x})$$

Für Punktladung:

$$W = \frac{1}{8\pi}\sum_{i\neq j}\frac{e_i e_j}{|x_i - x_j|}$$

$$W = \frac{1}{2}\int d^3x\,(\underbrace{\vec{E}^2}_{\text{Feldenergie}} - \underbrace{\sum_i \vec{E}_i^2}_{\text{Selbstenergie, unendlich}}) , \quad \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Leiter, Kapazitätskoeffizienten

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N V_j \varphi_j(\vec{x})$$

$$W = \frac{1}{2}\int d^3x\,(\vec{\nabla}\varphi)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N V_i V_j \overbrace{\int_D d^3x\, \vec{\nabla}\varphi_i\cdot\vec{\nabla}\varphi_j}^{c_{ij}}$$

c_{ij}: symmetr, pos. def.

c_{ij} = Ladung auf ∂d_i induziert durch Pot δ_{jk} auf L_k

$$Q_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} V_j$$

RB stetig

$$\vec{E}_i\cdot\vec{n}\,\big|_1^2 = \sigma \qquad \vec{B}_i\cdot\vec{n}\,\big|_1^2 = 0$$
$$\vec{n}\wedge\vec{E}_i\,\big|_1^2 = 0 \qquad \vec{n}\wedge\vec{B}_i\,\big|_1^2 = \frac{1}{c}\vec{J} \text{ - Flächenstromdichte}$$

Greensche Funktion (∂D geerdet)

$$G: \bar{D}\times D \to \mathbb{R}$$

$$\Delta_x G(\vec{x},\vec{y}) = -\delta(\vec{x}-\vec{y}) , \quad x,y\in D$$

$$G(\vec{x},\vec{y}) = 0 \qquad x\in\partial D \cup \{\infty\} , \vec{y}\in D$$

$$G(x,y) = G(y,x) \qquad \text{Reziprozitätsgesetz}$$

Bsp.

$D = \mathbb{R}^3$: $\quad 4\pi G(x,y) = \dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$

$D = (\vec{x}\in\mathbb{R}^3, x^1>0)$

$$4\pi G(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}^*|}$$

$$y^* = \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$D = \{|\vec{x}| > r\}$ $\qquad \vec{y}^* = \dfrac{r^2\vec{y}}{|\vec{y}^2|}$

$$4\pi G(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \frac{r}{|\vec{y}|}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}^*|}$$

Induzierte Ladung:

$$Q(y) = \int_{\partial D}\vec{\nabla}_x G(\vec{x},\vec{y})\cdot d\vec{o}$$

Multipolentwicklung

$$4\pi\varphi(x) = \frac{e}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{r^3} + \overbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^3 T_{ij}\frac{x_i x_j - \frac{1}{3}\vec{x}^2\delta_{ij}}{r^5}}^{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^3 Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5}} + \dots$$

Potential: Punktladung, Dipol, Quadrupol

$$Q_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(T)\delta_{ij} \qquad T_{ij} = 3\int d^3x'\, x'_i x'_j\, \rho(\vec{x}')$$

Q_{ij}: symmetrisch, spurlos, eindeutig (5 linear unabh.); T_{ij}: symmetrisch, nicht eindeutig (6 linear abh.)

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^\infty\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}q_{lm}\frac{Y_{lm}(\vec{e})}{r^{l+1}}$$

$$q_{lm} = \int d^3x'\,\overline{Y_{lm}(\vec{e}\,')}\, r'^{\,l}\rho(\vec{x}')$$

$l=0$: $\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$

$m=-1$: $\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}$

$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$, $m=0$

$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\, e^{i\varphi}$, $m=1$

Felder in 2 Dimensionen

$$\underline{E} = (E_1, E_2) \quad , \quad E(z) = E_1(x_1,x_2) - iE_2(x_1,x_2)$$

$$\operatorname{rot}\underline{E} = \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\operatorname{div}\underline{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} = \rho$$

$$E(z) = -\frac{d\Phi}{dz}$$

$$\Phi = \varphi_1 - i\varphi_2$$

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi_1 , \quad \underline{E}^\perp = \nabla\varphi_2$$

$$E_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \overset{C.R}{=} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} \quad , \quad E_2 = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}$$

Elektromagnetismus

$$\vec{f} = \frac{\vec{\imath}}{c}\wedge\vec{B} , \quad F = q\left(E + \frac{v}{c}\wedge B\right)$$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2}\int_{\gamma_2}\int_{\gamma_1}\frac{\vec{r}}{4\pi r^3}(d\vec{s}_1\cdot d\vec{s}_2)$$

$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ magnetisierung

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3y\,\frac{\operatorname{rot}\vec{M}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I}{4\pi c}\int_\gamma\frac{d\vec{s}\wedge(\vec{x}-\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \quad , \quad d\vec{F} = \frac{I}{c}d\vec{s}\wedge\vec{B}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi c}\int d^3y\,\frac{\vec{\imath}(\vec{y})\wedge(\vec{x}-\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi c}\int d^3y\,\frac{\vec{\imath}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

· Eindeutigkeit, $B \xrightarrow[|\vec{x}|\to\infty]{} 0$

Feldgleichungen

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$
$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{\vec{\imath}}{c}$$

Ampèresches Gesetz

$$\int_{\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{c}\int_S\vec{\imath}\cdot d\vec{o}$$

Kraftdichte

$$\vec{f} = \frac{\vec{\imath}}{c}\wedge\vec{B} + \rho\vec{E}$$
$$\vec{F} = e\frac{\vec{v}}{c}\wedge\vec{B} + e\vec{E}$$

magnetisches Dipolmoment

$$\vec{m}, \quad \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m}\wedge\vec{x}}{4\pi r} = \operatorname{rot}\frac{\vec{m}}{4\pi r}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\left(\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{4\pi r}\right) + \vec{m}\,\delta(\vec{x})$$

$$\vec{\imath} = -c\vec{m}\wedge\vec{\nabla}\delta$$

Oberflächenstrom

$$\vec{\imath}(\vec{x}) = \int_S do\,\vec{J}(\vec{y})\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

J: Flächenstromdichte

Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div}\vec{\imath} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Maxwell Gleichung

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$
$$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho$$
$$\operatorname{rot}\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\vec{\imath}}{c}$$

Poynting Vektor

$$\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2)\,d^3x = -\int_{\partial V}c(\vec{E}\wedge\vec{B})\,d\vec{o} - \int_V\vec{\imath}\cdot\vec{E}\,d^3x$$

$$\vec{S} = c(\vec{E}\wedge\vec{B}) \sim \text{Energiestromdichte} , \quad u = \frac{1}{2}(\vec{E}^2+\vec{B}^2) \rightsquigarrow \text{Energiedichte}$$

Dynamik des freien Feldes

$$\Box u = 0 , \quad u(\vec{x},0) , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x},0)$$

$$D(\vec{x},0) = 0 \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}(\vec{x},0) = \delta(\vec{x})$$

$$D(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi r}[\delta(ct-r) - \delta(ct+r)] \quad , \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}(\vec{x},0) = 0$$

$$u(\vec{x},t) = \int d^3y\left[\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}(\vec{x}-\vec{y},t)\,u(\vec{y},0) + D(\vec{x}-\vec{y},t)\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{y},0)\right]$$

Eichungen

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\left.\begin{aligned}\Box\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A}\right) &= \rho \\ \Box\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A}\right) &= \frac{\vec{\imath}}{c}\end{aligned}\right\}\text{ inhomogen MG.}$$

$$\varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} , \quad \vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$$

χ: Skalarfeld

Lorenz	Coulomb
$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A} = 0$	$\operatorname{div}\vec{A} = 0$
Es verbleiben: $\Box\chi = 0$	$\Delta\chi = 0$
$\Box\varphi = \rho$	$\Delta\varphi = -\rho$
$\Box\vec{A} = \frac{\vec{\imath}}{c}$	$\Box\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \frac{\vec{\imath}}{c}$ } inh. MG

Freie Feld (nehme Realteil)

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + i\vec{E}_2$$

$E_1 \parallel E_2$ linear

$E_1 \perp E_2$, $|E_1| = |E_2|$, zirkular

$\vec{E}_2 = \pm\vec{e}\wedge\vec{E}_1$, rechts bzw. links

$$\vec{\varepsilon}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2)$$

rotationsinvariante Basis

Intensität freies Feld

$$I = \frac{c}{2}(\vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2) = \frac{c}{2}(\vec{E}_0, \vec{E}_0)$$

$$I = \frac{c}{2}(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2)$$

$(E,F) = \bar{E}\cdot F = (E_1 - iE_2)(F_1 + iF_2)$

Retardierte Potentiale

$$\varphi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int d^3y\,\frac{\rho\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi c}\int d^3y\,\frac{\vec{\imath}\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

Wellenzone

$\vec{E},\vec{B} \sim r^{-1}$

$r \gg d$, $r \gg \lambda$

d Ladungsverteilung

Boosts transf.

$$\bar{\rho} = \gamma\rho - \frac{\vec{v}\cdot\vec{\imath}\,\gamma}{c^2} \quad , \bar{\vec{\imath}}_\parallel = -\gamma\rho\vec{v} + \gamma\vec{\imath}_\parallel \quad , \bar{\vec{\imath}}_\perp = \vec{\imath}_\perp$$

$$\bar{\vec{E}}_\parallel = \vec{E}_\parallel , \quad \bar{\vec{E}}_\perp = \gamma\left(\vec{E}_\perp + \frac{1}{c}\vec{v}\wedge\vec{B}\right)$$

$$\bar{\vec{B}}_\parallel = \vec{B}_\parallel , \quad \bar{\vec{B}}_\perp = \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{1}{c}\vec{v}\wedge\vec{E}\right)$$

Elektrische Dipolstrahlung $\quad w \ll \omega^{4}$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi rc}\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi rc^2}\underbrace{\vec{e}\wedge(\vec{e}\wedge\ddot{\vec{p}})}_{-\ddot{p}_\perp} , \quad \vec{B} = \vec{e}\wedge\vec{E}$$

$$S(\theta) = \frac{1}{16\pi^2 r^2 c^3}\ddot{\vec{p}}^{\,2}\sin^2\theta$$

$$W = \frac{1}{6\pi c^3}\ddot{\vec{p}}^{\,2}$$

1.) $\ddot{\vec{x}} = 0$ Trägheit, Lichtausbreitung

$$c^2(t_1-t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 = 0$$

2.) Es gibt Inertialsysteme

Lorentzgruppe

$$\Lambda^T g\Lambda = g , \quad g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{pmatrix}$$

eigentlich orthochron:

$$\det\Lambda = 1 , \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1$$

$$\Lambda = \Lambda(R_1)\Lambda(\chi)\Lambda(R_2)$$

Λ orthogonal bzgl. g

Boost $\quad v = c\tanh\chi \qquad \Lambda^{-1} = \Lambda(-v)$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix}\gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh\chi & -\sinh\chi & 0 & \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & 0 & \\ 0 & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$$

Feldtensor

$$j^\mu = (c\rho, \vec{\imath})$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} &= 0 \\ F^{\mu\nu}{}_{,\mu} &= \frac{1}{c}j^\nu\end{aligned}\right\}\text{MG.}$$

$$A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$$

$$\bar{j}^\mu(\bar{x}) = j^\alpha(x)\Lambda^\mu{}_\alpha$$

$$\bar{F}_{\mu\nu}(\bar{x}) = F_{\alpha\beta}(x)\Lambda_\mu{}^\alpha\Lambda_\nu{}^\beta$$

Eichtransformationen

$$A_\mu \to A_\mu - \chi_{,\mu}$$

Lorenz Eichung

$$A^\mu{}_{,\mu} = 0$$

$$\Box A^\mu = \frac{j^\mu}{c}$$

Ladungserhaltung: $j^\nu{}_{,\nu} = cF^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} = 0$

El.magn. Potential: $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$

$$A^\mu_{\text{ret}} = \frac{1}{c}\int d^4y\, D_{\text{ret}}(x-y)\, j^\mu(y)$$

invariant: $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2)$, $\det F_{\mu\nu} = (E\cdot B)^2$

Relativistische Mechanik

$(\frac{dx}{ds}, \frac{dx}{ds}) = 1$

$\tau = \frac{s}{c}$

$d\tau = dt\, \gamma^{-1}$

$ds^2 = (c^2 - v^2) dt^2$

$k = \binom{\omega/c}{k}$

Impuls, Geschwindigkeit

$u = \frac{dx}{d\tau}$, $p = mu$

$u^\mu = \gamma (c, \vec{v})$

$p^\mu = \gamma m (c, \vec{v})$

$(u,u) = c^2$; $E_\gamma = |p\nu|$ falls $m_0 = 0$

$(p,p) = m c^2$

Kinetische Energie

$cp^0 = \gamma m c^2$

$= mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \dots$

Ruheenergie

$\frac{d}{dt} \vec{p} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B})$

relativ. Bewegungsgl.

$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu}(\tau) p_\nu$

Energie-Impulstensor

• symmetrisch, spurlos, homogen grad 2 in E, B

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) & \vec{E} \wedge \vec{B} \\ \vec{E} \wedge \vec{B} & \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\delta_{ik} - E_i E_k - B_i B_k \end{pmatrix}$$

Impulssatz

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu =: -f^\mu = -(\frac{1}{c} \vec{\iota} \cdot \vec{E}, \varrho \vec{E} + \frac{\vec{\iota}}{c} \wedge \vec{B})$$

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \frac{1}{c} T^{\mu 0} = -\int_{\partial V} \sum_{k=1}^{3} T^{\mu k} do_k - \int_V d^3x\, f^\mu$$

$\mu = 0 \Rightarrow$ Energiesatz

Impulsdichte: $\frac{1}{c} T^{\mu 0}$

Impulsstrom: $\sum_{k=1}^{3} T^{\mu k} do_k$

Feldimpuls im Freien Feld

Impulserhaltung

$$p^\mu = \frac{1}{c} \int_{x^0 = 0} d^3x\, T^{\mu 0}(x)$$

$\bar{p}^\mu = \mathrm{sgn}(\Lambda^0{}_0) \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$

Anwendung statische Felder

T_{ik} homogen grad 2

$F_i = \int_{\partial V} (-T_{ik}) do_k$

$\sigma_{ik} \rightarrow$ Maxwell spannungstensor

Leitungsladungsdichte

$\varrho_L(\vec{x}) = \sum_{(a)} g(\vec{x} - \vec{r}_{(a)}) e_{(a)}$

elektrische Polarisation: $\vec{P}(\vec{x}, t) = \sum_{(a)} g(\vec{x} - \vec{r}_{(a)}) \vec{p}_{(a)}(t)$

Magnetische Polarisation: $\vec{M}(\vec{x}, t) = \sum_{(a)} g(\vec{x} - \vec{r}_{(a)}) m_{(a)}(t)$

Makroskopische Maxwellgleichungen

$\mathrm{div} \vec{B} = 0$, $\mathrm{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$; $\vec{D} = \vec{E} + \vec{P}$, $\vec{H} = \vec{B} - \vec{M}$

$\mathrm{div} \vec{D} = \varrho_L$, $\mathrm{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\vec{\iota}_L}{c}$; $\frac{\partial \varrho_L}{\partial t} + \mathrm{div} \vec{\iota}_L = 0$

$\bar{\varrho}(\vec{x}, t) = \varrho_L(\vec{x}) - \mathrm{div} \vec{P}(\vec{x}, t)$, $\bar{\vec{\iota}}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(\vec{x}, t) + c\, \mathrm{rot} \vec{M}(\vec{x}, t) + \vec{\iota}_L(x, t)$

Verknüpfungsgleichungen

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{\iota}_L = \sigma \vec{E}$

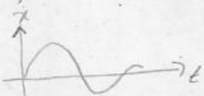
anisotrope Medien: $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$

Bsp. Kerreffekt: $\varepsilon(E) \propto E^2$, $n = n_0 + n_1 \vec{E} + n_2 \vec{E}^2$ (Brechungsindex); gross

Dispersion

$\chi(t) = \varepsilon(t) - 1$ elektr. Suszeptibilität, Stossantwort

$$P(t) = \int \chi(t-s) E(s) ds,$$



$\int_0^\infty |\chi(t)| dt < \infty$

Kramers-Kronig

$$\mathrm{Im}\, \hat{\chi}(\omega) = \frac{-2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\mathrm{Re}\, \hat{\chi}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$$\mathrm{Re}\, \hat{\chi}(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\omega' \mathrm{Im}\, \hat{\chi}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Fouriertransformation

$\hat{f}(\omega) = \int dt\, f(t) e^{i\omega t}$

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega\, \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t}$

Randbedingungen

Stetig: $\vec{B}_\perp$, $\vec{E}_\parallel$, $\vec{D}_\perp$, $\vec{H}_\parallel$

$\vec{S}_\perp = c(\vec{E}_\parallel \wedge \vec{H}_\parallel)$

Poynting Vector in Materie

$\vec{S} = c \vec{E} \wedge \vec{H}$

Snells Gesetz

$n = \sqrt{\varepsilon}$

$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$

Fresnel Formeln

$I = \frac{c}{2} n (\vec{E}, \vec{E}) = \frac{c}{2} \frac{1}{n} (\vec{B}, \vec{B})$

TE-Fall $\vec{E} \perp N$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\sin\alpha_3 \cos\alpha_1 - \sin\alpha_1 \cos\alpha_3}{\sin\alpha_3 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_3} = \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_3 + \alpha_1)}$$

TM-Fall, $\vec{B} \perp N$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\sin\alpha_1 \cos\alpha_1 - \sin\alpha_3 \cos\alpha_3}{\sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_3 \cos\alpha_3} = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_3)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_3)}$$

Eigenschaften $\hat{\chi}(\omega)$

• $\hat{\chi}(\omega)$ analytisch in ω in der Halbebene $\mathrm{Im}\,\omega > 0$

• $\hat{\chi}(\omega)$ stetig, beschränkt in und $\chi(\omega) \to 0$, $|x| \to \infty$

• $\overline{\hat{\chi}(\omega)} = \hat{\chi}(-\bar{\omega})$

• $\hat{\chi}(0) > 0$

• $\mathrm{Im}\, \hat{\chi}(\omega) > 0$, für $\omega > 0$

• $\hat{\chi}(\omega)$ ist in $\mathrm{Im}\,\omega \geq 0$ nirgends reell ausser auf imaginärachse. Dort nimmt $\hat{\chi}(\omega)$ monoton ab von $\hat{\chi}(0) > 0$ zu $\hat{\chi}(i\infty) = 0$.

Homogenes Dielektrikum

$\mu = 1$, $\hat{\varepsilon}(\omega) = 1 + \hat{\chi}(\omega)$

$\varrho_L = 0$, $\vec{\iota}_L = 0$, $n(\omega) = \sqrt{\hat{\varepsilon}(\omega)}$

$\mathrm{Im}\, n(\omega) \lesseqgtr 0$ für $\mathrm{Re}\,\omega \lesseqgtr 0$

Fouriertransformierte Felder MG

$\mathrm{div} E = 0$, $\mathrm{rot} \vec{E} - \frac{i\omega}{c} \vec{B} = 0$

$\mathrm{div} B = 0$, $\mathrm{rot} \vec{B} + \frac{i\omega}{c} \varepsilon(\omega) \vec{E} = 0$

Ebene Wellen

$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, $\vec{k} = \frac{\omega}{c} n(\omega) \vec{e}$

$= \vec{E}_0 e^{i(\frac{\omega}{c} \mathrm{Re}\, n(\omega) \vec{e} \cdot \vec{x} - \omega t)} \cdot e^{-\frac{\omega}{c} \mathrm{Im}\, n(\omega) \vec{e} \cdot \vec{x}}$ exp. Dämpfung

Wellenleiter

Unendlich langer Hohlzylinder, ideal leitende Wand, im Zylinder Vakuum, Feld monochromatisch

$E_\parallel = 0$, $\vec{B}_\perp = 0$, $(\Delta_3 + k^2) \vec{E} = (\Delta_3 + k^2) \vec{B} = 0$, vollständig bestimmt durch E_3, B_3

$ik \underline{E} + ik \underline{B}^\perp = \underline{\nabla} E_3$, $ik \underline{E} + ik \underline{B}^\perp = (\underline{\nabla} B_3)^\perp$, RB: $E_3 = \frac{\partial B_3}{\partial n} = 0$ auf $\partial\Omega$

TM-Fall: $\chi = E_3$, $(\Delta + \lambda)\chi = 0$, $\chi = 0$ auf $\partial\Omega$

TE-Fall: $E_3 = 0$, $\chi = B_3$, $(\Delta + \lambda)\chi = 0$, $\frac{\partial \chi}{\partial n} = 0$ auf $\partial\Omega$

TEM-Fall: $B = \vec{e}_3 \wedge \vec{E}$, $\int \vec{E} d\vec{s} = 0$, $\mathrm{rot} E = 0$, Rand $\partial\Omega$, $E = \nabla\varphi$, $\Delta\varphi = 0$, 1zsh $\Rightarrow \varphi$ = const

Moden sind mögliche Eigenfunktionen

Senkrechte Inzidenz

TM = TE - Fall $\alpha = 0$

$\frac{E_2}{E_1} = \frac{-B_2}{B_1} = \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3}$

$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3}\right)^2$

Brewster Winkel (TM)

$\alpha_1 = \alpha_B$, $\alpha_1 + \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ $\Big\}$ $B_2 = 0$

Total reflexion

$\alpha_3 = \frac{\pi}{2} + i\gamma$

$e^{i(\vec{k}_3 \vec{x} - \omega t)} = e^{i(k_3 x \cosh\gamma - \omega t)}$.

$e^{-k_3 y \sinh\gamma}$.

TE Fall

$\frac{E_2}{E} = \frac{\cos\alpha_1 \cosh\gamma + i \sin\alpha_1 \sinh\gamma}{\cos\alpha_1 \cosh\gamma - i \sin\alpha_1 \sinh\gamma}$

Vektoridentitäten

$\mathrm{rot\,rot}\, \vec{v} = \mathrm{grad\,div}\, \vec{v} - \Delta\vec{v}$

$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \nabla(\vec{v}^2/2) - \vec{v} \wedge \mathrm{rot}\vec{v}$

$\mathrm{div}(\varrho\vec{v}) = \nabla\varrho \cdot \vec{v} + \varrho\, \mathrm{div}\vec{v}$

$\mathrm{rot}(\varrho\vec{v}) = \nabla\varrho \wedge \vec{v} + \varrho\, \mathrm{rot}\vec{v}$

$\mathrm{div}(v \wedge w) = \vec{w}\, \mathrm{rot}\vec{v} - \vec{v}\, \mathrm{rot}\vec{w}$

$\mathrm{rot}(v \wedge w) = (\mathrm{div}\vec{w})\vec{v} - (\mathrm{div}\vec{v})\vec{w} + (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w}$

$\mathrm{div}\, \vec{P}(\tau(x)) = \dot{\vec{P}}(\tau(x)) \cdot \vec{\nabla}\tau(x)$

$\mathrm{rot}\, \vec{P}(\tau(x)) = \nabla\tau(x) \wedge \dot{\vec{P}}(\tau(x))$

$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{P}(\tau(x)) = (\vec{u} \cdot \nabla\tau(x)) \cdot \dot{\vec{P}}(\tau(x))$

$\int B^2 d^3x = \int A \cdot \mathrm{rot\,rot} A\, d^3x$

$\int \delta(\vec{x}) \cdot \vec{f}(\vec{x}) d^3x = -(\mathrm{div} \vec{f})(0)$

Tensorrechnung

$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, $g_{\mu\nu}^{-1} = g^{\mu\nu}$

inverse: auf Höhe $\Leftrightarrow$

transp: vertauschen

Satz von Thomson

Hält man mehrere Körper mit vorgegebener Gesamtladung fest, so nimmt die elektrostatische Energie ein Minimum an, wenn die Ladungen so verteilt sind, dass auf jedem von ihnen das Potential konstant ist. Keine Ladung im Inneren.

Trigonometrie

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ungerade Teil

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ gerade Teil

$\exp x = \cosh x + \sinh x$; $\frac{d}{dx} \binom{\sinh x}{\cosh x} \circlearrowleft \frac{d}{dx}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

$\nabla(v \cdot w) = (v \cdot \nabla)w + (w \cdot \nabla)v + v \wedge \mathrm{rot}\, w + w \wedge \mathrm{rot}\, v$

E-Feld berechnen

Gauss-Gesetz

Potential, $-\nabla\varphi = E$

unendlicher Draht: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{e}_r$

Draht lösung

$$A = \frac{v\lambda e_z}{4\pi c} \log\left(\frac{1 + \sqrt{1 - (\beta/\varepsilon)^2}}{1 - \sqrt{1 - (\beta/\varepsilon)^2}}\right)$$

Heaviside immer Fallunterscheidung

Homogen geladene Vollkugel

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} Q \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}, & |x| > R \\ \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{R^3} \vec{x}, & |x| < R \end{cases}$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi r} \\ \frac{Q}{4\pi R}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \end{cases}$$

2dim Fundamentallösung, $\Box$-Operator

$D_2(\underline{x}, t) = \int d^2y\, D_3(\underline{x} - \underline{y}, t) \delta^{(2)}(\underline{y})$

$= \int dy_3\, D_3(\underline{x}, -y_3, t)$

$= \frac{1}{2\pi \sqrt{c^2 t^2 - |x|^2}} (\theta(ct - |x|) - \theta(-ct - |x|))$

Konforme Abbildungen

$\log(z) = \log|z| + i \arg z$

$\Phi(z) = -i \frac{\log z}{\alpha} V$

$E_1 = \frac{z_2}{\alpha |z|^2} V \hat{e}_{z_1}$, $E_2 = -\frac{z_1}{\alpha |z|^2} \hat{e}_{z_2}$

$\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\phi}(z) = \tilde{\Phi}(f(z))$

RB muss für $\mathrm{Re}\,\Phi$ stimmen

$\int_V \nabla v\, d^3x = \int_{\partial V} v\, d\vec{o}$

$\int_V \mathrm{rot}\, \vec{v}\, d^3x = \int_{\partial V} d\vec{o} \wedge \vec{v}$

$\int_V (u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) d^3x = \int_{\partial V} u \nabla v \cdot do$

$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) d^3x = \int_{\partial V} (u \nabla v - v \nabla u) do$

$\int_S d\vec{o} \wedge \nabla u = \int_{\partial S} u\, d\vec{s}$

$B = \mathrm{rot} A = -\frac{\partial A_3}{\partial \varrho} e_\varphi$

$= \frac{-\lambda v}{4\pi c} \frac{S/\varrho^2}{\sqrt{1 - (\beta/\varepsilon)^2}} \left[\frac{1}{1 \pm \sqrt{1 - (\beta/\varepsilon)^2}}\right] e_\varphi$

$= \frac{\lambda v}{4\pi c} \frac{2}{\varrho \sqrt{1 - (\beta/\varepsilon)^2}} e_\varphi$

Maße

$\Delta \frac{1}{|x|} = -4\pi \delta(\vec{x})$

$\Phi(z) = \mathrm{const}\; i z^{\pi/\alpha}$

Polarisiertes Licht

$I = c \cdot s_0$, $\vec{s} = 0$ unpolarisiert

$\vec{s}^2 = s_0^2$, $\frac{1}{2} \mathrm{tr}\, S = s_0$, $S = \underline{E}\underline{E}^*$

$\frac{1}{2} \mathrm{tr}(S^2) = s_0^2 + \vec{s}^2$; $e_+ = e_1$ horizontal, $e_- = e_2$ vertikal

$e_\pm^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \pm e_2)$ $(\pm 45°$ lin$)$

$e_\pm^{(c)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \pm i e_2)$ (rechts, links zirkular)

Frequenzen

$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega' = \omega\gamma(1 - \beta)$ $= \omega \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$