Digitaltechnik
Übung 3

Matteo Dietz
mdietz@student.ethz.ch

Administrativ

- Nächste Woche ist Zwischenprüfung!
- 1h unter Prüfungsbedingungen
- Stoff der ersten drei Vorlesungen

Theorie – Bool‘sche Algebra

- Bindungsregeln (Vorrangregeln):
- 1. Klammern
- 2. Nicht
- 3. {AND, OR, NAND, NOR} vor {XOR, XNOR}

- Wie sonst beim Rechnen:
  - Kommutativität
  - Assoziativität
  - Distributivität

Theorie – Bool‘sche Algebra

Kommutativität	$A \wedge B = B \wedge A$
	$A \vee B = B \vee A$
Assoziativität	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
Distributivität	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) = A \wedge (B \vee C)$
	$(A \vee B) \wedge (A \vee C) = A \vee (B \wedge C)$

Übersicht – Bool‘sche Algebra

1. NICHT

$$\overline{\overline{A}} = A$$

2. NULL-THEOREM

(a) $A \vee 0 = A$ (b) $A \wedge 0 = 0$

3. EINS-THEOREM

(a) $A \vee 1 = 1$ (b) $A \wedge 1 = A$

4. IDEMPOTENZ

(a) $A \vee A = A$ (b) $A \wedge A = A$

5. VERKNÜPFUNG MIT KOMPLEMENT

(a) $A \vee \overline{A} = 1$ (b) $A \wedge \overline{A} = 0$

6. ADSORPTIONSGESETZE

(a) $A \vee (\overline{A} \wedge B) = A \vee B$ (b) $A \wedge (\overline{A} \vee B) = A \wedge B$

7. ABSORPTIONSGESETZE

(a) $A \vee (A \wedge B) = A$ (b) $A \wedge (A \vee B) = A$

8. NACHBARSCHAFTSGESETZE

(a) $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) = B$ (b) $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) = B$

Aufgaben – Bool‘sche Algebra

- 1.-5. sind die Grundgesetze
  - lassen sich mittels Wahrheitstabellen beweisen:

(a) $A \vee \overline{A} = 1$ (b) $A \wedge \overline{A} = 0$

$\mathbf{A}$	$\overline{\mathbf{A}}$	$\mathbf{A \vee \overline{A}}$	$\mathbf{A \wedge \overline{A}}$
0	1		
1	0		

- 6.-8. lassen sich aus den Grundgesetzen herleiten:

Leite folgende Absorptionsregel mittels Grundregeln her

$$A \wedge (A \vee B) = A$$

Theorie – De Morgan‘sche Regeln

Beziehungen zwischen NAND/NOR und AND/OR:

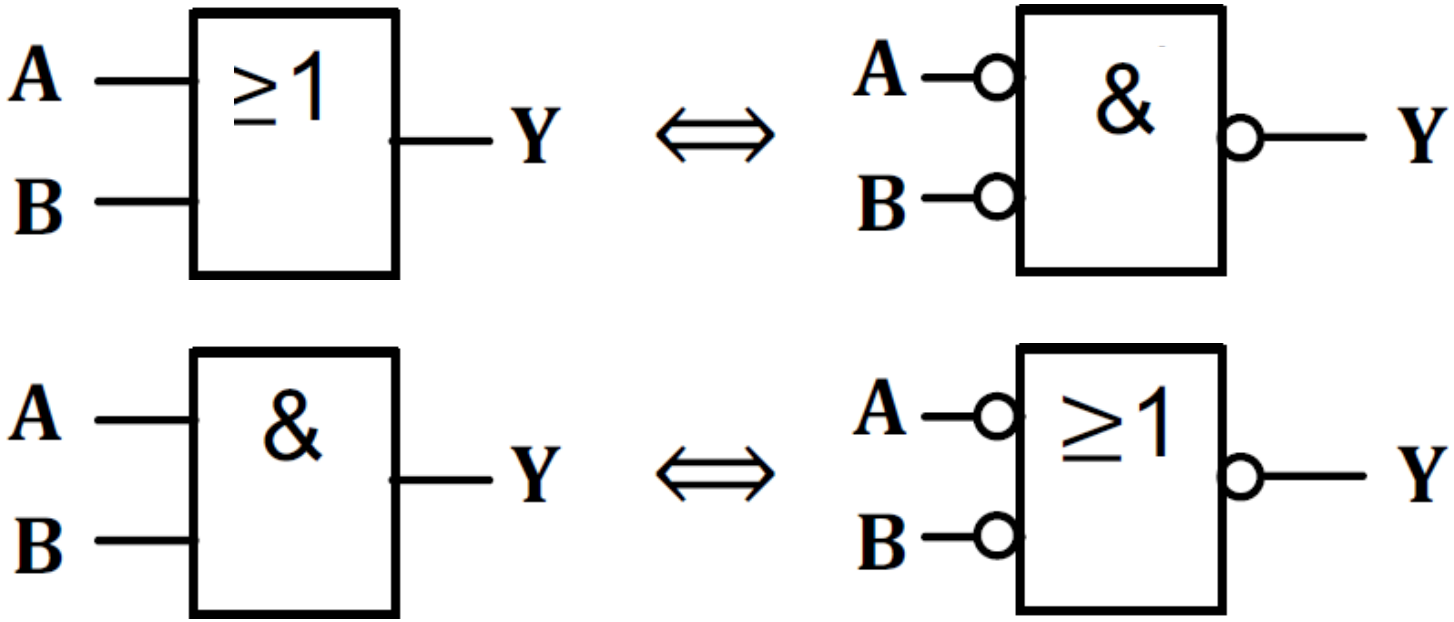
Erstes Gesetz:	$\overline{A \wedge \cdots \wedge B} = \overline{A} \vee \cdots \vee \overline{B}$
Zweites Gesetz:	$\overline{A \vee \cdots \vee B} = \overline{A} \wedge \cdots \wedge \overline{B}$

Daraus folgen zwei sehr nützliche Umwandlungen:

$$A \wedge \cdots \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \cdots \vee \overline{B}} \qquad A \vee \cdots \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \cdots \wedge \overline{B}}$$

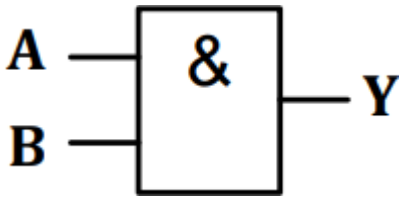
Theorie – De Morgan‘sche Regeln

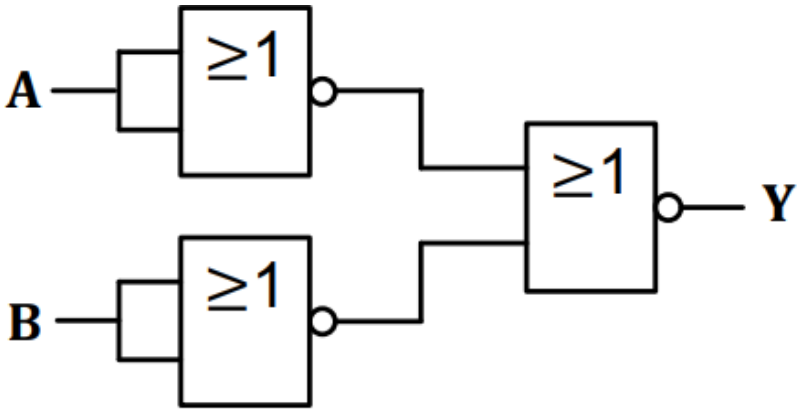
- Wenn man alle Eingänge und Ausgänge invertiert, wird
  - AND zu OR
  - OR zu AND

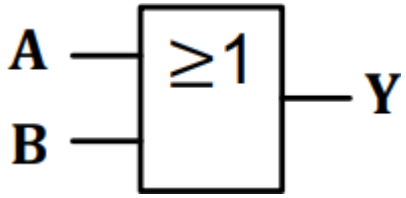


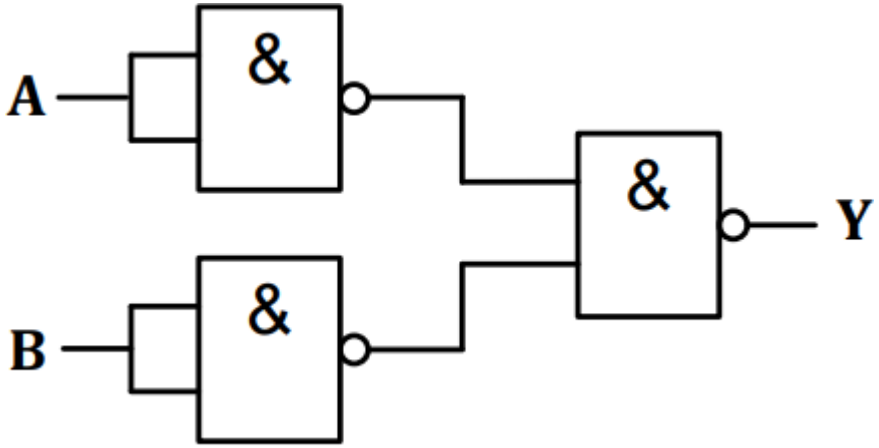
Theorie – De Morgan‘sche Regeln

- Universalgatter

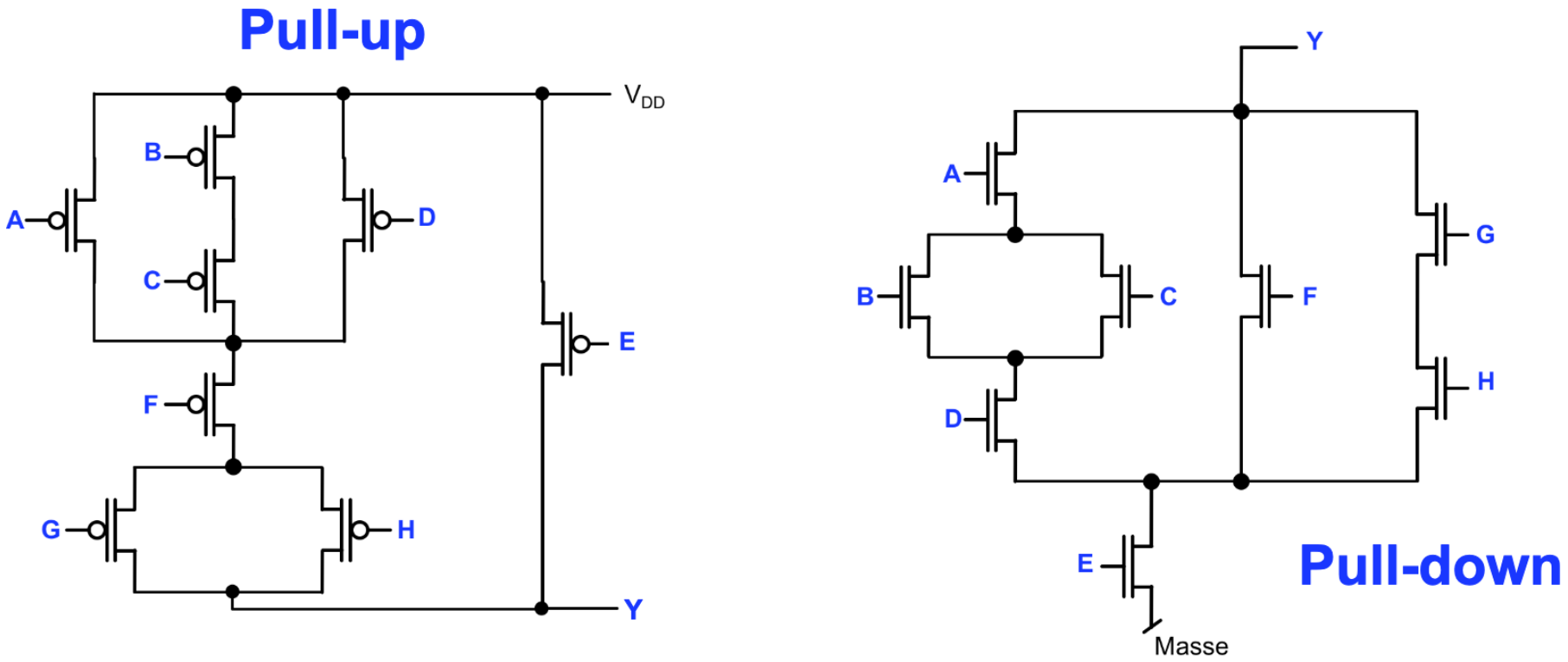








Theorie – De Morgan‘sche Regeln



$$Y_{pd} = \overline{((A \cdot (B + C) \cdot D) + F + (G \cdot H)) \cdot E}$$

$$Y_{pu} = ((\overline{A} + (\overline{B} \cdot \overline{C}) + \overline{D}) \cdot \overline{F} \cdot (\overline{G} + \overline{H})) + \overline{E}$$

Aufgabe – Bool‘sche Algebra

Beispiel aus Vorlesung

$$\neg\{(A \wedge B) \vee (A \wedge C)\} \vee (\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C)$$

Prüfungsaufgabe Frühjahr 2021

$$\left\{ \left[\bar{A} \wedge B \wedge (C \vee (\bar{B} \wedge D))\right] \vee (\bar{A} \wedge B) \right\} \wedge \bar{C}$$

Theorie – Normalform

- Minterme:
  - AND-Verknüpfung, welche ′1′ ergibt für nur eine Kombination der Schaltungsvariablen.

- Maxterme:
  - OR-Verknüpfung, welche ′0′ ergibt für nur eine Kombination der Schaltungsvariablen. Bei der Bildung der Maxterme müssen die Variablen invertiert werden!

Theorie – Normalform

- Beispiel:
  - A und B sind die Eingänge einer Schaltung, Z ist der Ausgang

A	B	Z	Minterme	Maxterme
0	0	1		
0	1	0		
1	0	0		
1	1	1		

Theorie – Normalform

- Beispiel:
  - A und B sind die Eingänge einer Schaltung, Z ist der Ausgang

A	B	Z	Minterme	Maxterme
0	0	1	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	
0	1	0		$A \vee \overline{B}$
1	0	0		$\overline{A} \vee B$
1	1	1	$A \wedge B$	

Theorie – Normalform

- Minterme: UND Verknüpfung
- Maxterme: ODER Verknüpfung

- Disjunktive Normalform: Zeilen der Wahrheitstabelle mit Ausgang = 1
  Minterme der Zeilen definieren
  Minterme mit OR verknüpfen
- Konjunktive Normalform: Zeilen der Wahrheitstabelle mit Ausgang = 0
  Maxterme der Zeilen definieren
  Maxterme mit AND verknüpfen

Disjunktive Normalform – DNF

- Disjunktive Normalform:

  Zeilen der Wahrheitstabelle mit Ausgang = 1
  Minterme der Zeilen definieren
  Minterme mit OR verknüpfen

- DNF Beispiel:

A	B	Z	Minterme	Maxterme
0	0	1	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	
0	1	0		$A \vee \overline{B}$
1	0	0		$\overline{A} \vee B$
1	1	1	$A \wedge B$	

$$Z = (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B)$$

Konjunktive Normalform – KNF

- Konjunktive Normalform:

  Zeilen der Wahrheitstabelle mit Ausgang = 0
  Maxterme der Zeilen definieren
  Maxterme mit AND verknüpfen

- KNF Beispiel:

A	B	Z	Minterme	Maxterme
0	0	1	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	
0	1	0		$A \vee \overline{B}$
1	0	0		$\overline{A} \vee B$
1	1	1	$A \wedge B$	

$$Z = (A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B)$$

Aufgabe – Normalform

A	B	C	Y(A,B,C)	Minterm	Maxterm
0	0	0	0		
0	0	1	1		
0	1	0	0		
0	1	1	1		
1	0	0	1		
1	0	1	1		
1	1	0	0		
1	1	1	1		

DNF:

KNF:

Kahoot!