

Übungsstunde 1

Themenüberblick

- **Einführung Signale:**

Einteilung der Signale und einfache Beispielaufgaben zu Signalen

- **Lineare Algebra Recap:**

Lineare Räume und Unterräume:

Lineare Unabhängigkeit, Basen, Koordinaten, Dimensionsbegriff, duale Basen, Funktionsräume, Normen, Skalarprodukte, Orthogonalität

Eigenwerte, Eigenvektoren, Matrixdiagonalisierung

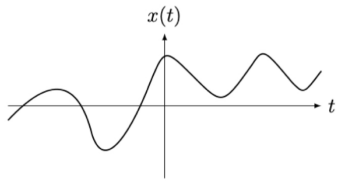
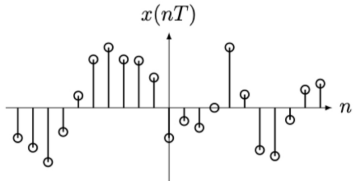
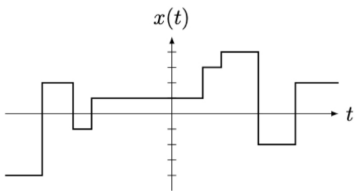
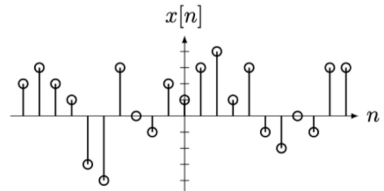
Singulärwertzerlegung

Aufgaben für diese Woche

1, **2, 3, 4, 5, 6**, 7, **8, 9**, 10, **11**, 12, 13, 14, **15**

Die **fettgedruckten** Übungen empfehle ich, weil sie wesentlich zu eurem Verständnis der Theorie beitragen und/oder sehr prüfungsrelevant sind.

1 Einteilung der Signale

Zeit Signal-amplitude	kontinuierlich	diskret
kontinuierlich	analoge Signale 	zeitdiskrete Signale 
diskret	amplitudendiskrete Signale 	digitale Signale 

Beispielsaufgabe (aus Aufgabe 1, 2 und 3)

Für die abgebildeten Signale $x_1(t)$, $x_2(t)$ (mit normierter Amplituden- und Zeitachse) zeichne man folgende Signale:

a) $x_1(1-t)$

1.b) ← im Übungskriptum

d) $4x_2(t/4)$

2.d)

b) $x_1(2t+2)$

1.c)

e) $\frac{1}{2}x_2(t)\sigma(t) + x_2(-t)\sigma(t)$

2.j)

c) $[x_1(t) + x_1(2-t)]\sigma(1-t)$

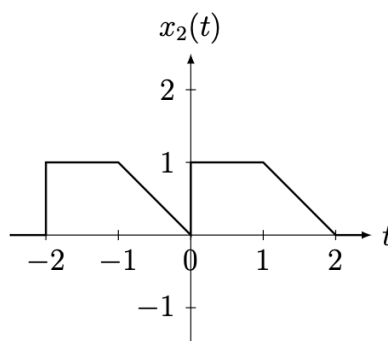
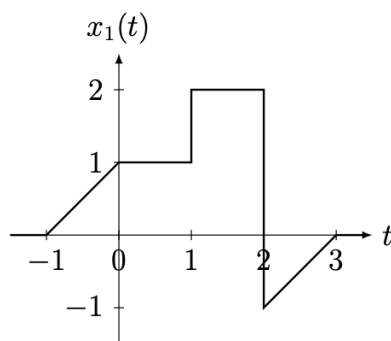
1.e)

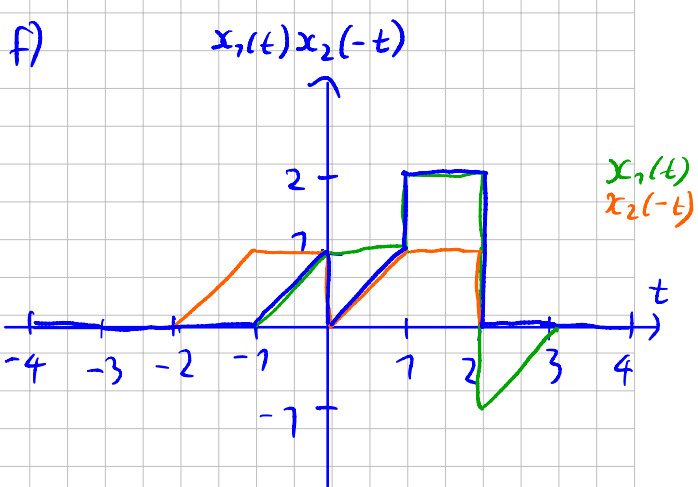
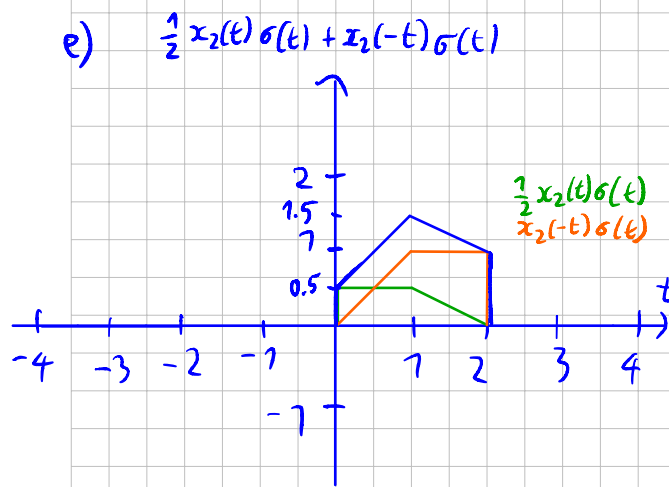
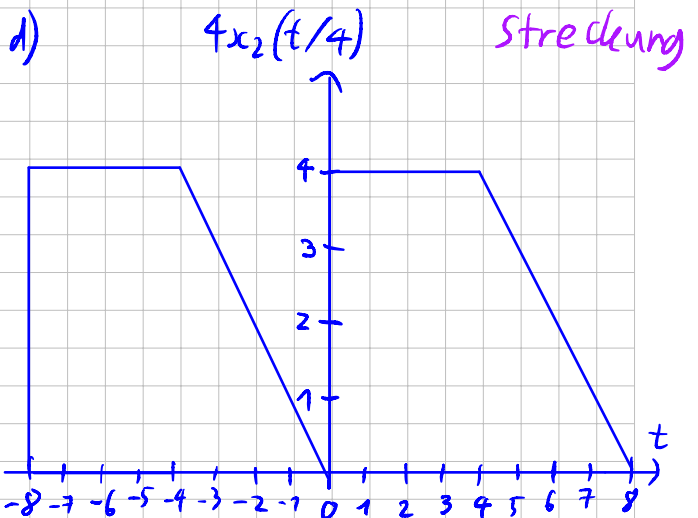
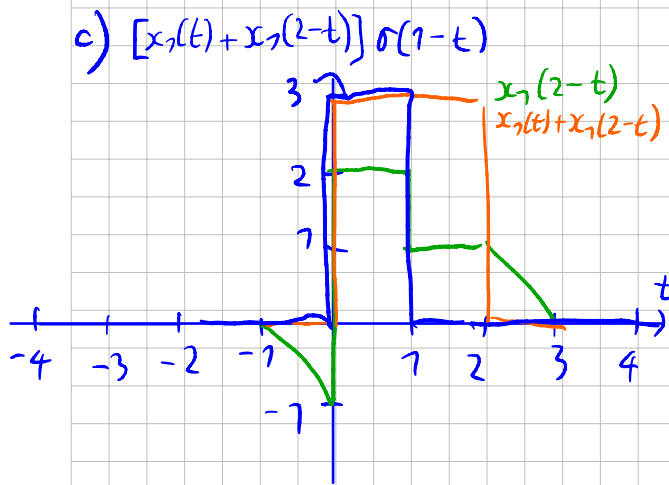
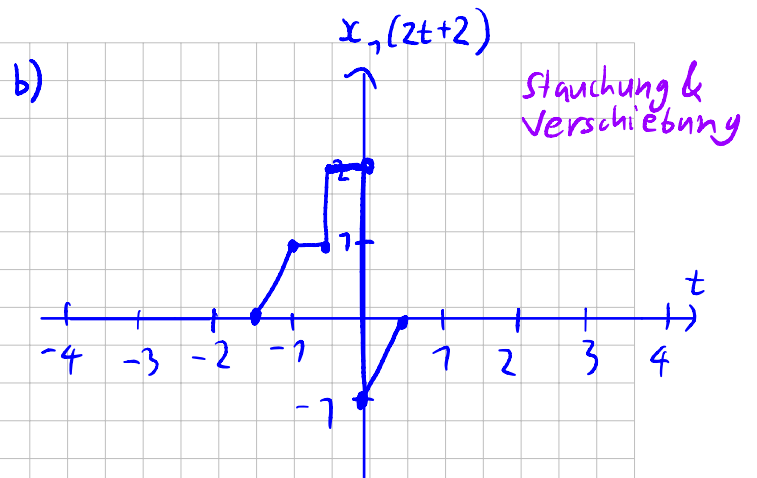
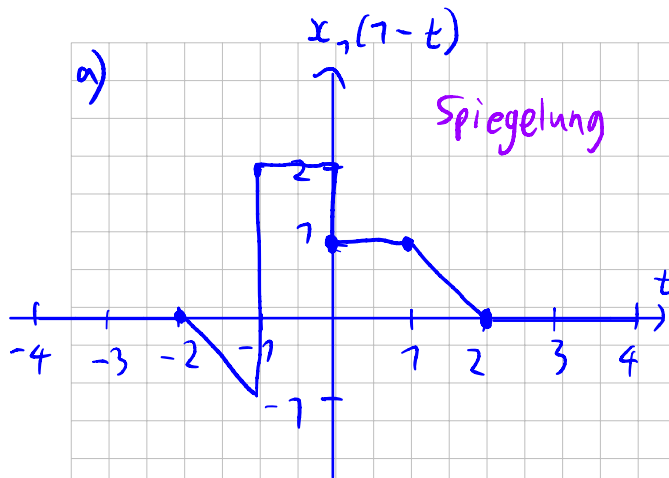
f) $x_1(t)x_2(-t)$

3.b)

wobei

$$\sigma(t) := \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$





2 Lineare Algebra Recap

Lineare Räume

Definition: Ein linearer Raum über $\mathbb{C}$ ist eine nichtleere Menge X zusammen mit

- (i) einer Abbildung $+: X \times X \rightarrow X$, genannt Addition und notiert mit $x_1 + x_2$,
 - (ii) einer Abbildung von $\mathbb{C} \times X$ nach X , genannt skalare Multiplikation und notiert mit αx ,
- so, dass Addition und skalare Multiplikation folgende Eigenschaften erfüllen:

- (A1) Kommutativität (+): $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$, für alle $x_1, x_2 \in X$.
- (A2) Assoziativität (+): $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$, für alle $x_1, x_2, x_3 \in X$.
- (A3) Nullelement (+): $\exists! 0 \in X$, so dass $0 + x = x$, für alle $x \in X$.
- (A4) Inverses Element (+): $\forall x \in X \exists! -x \in X$, so dass $x + (-x) = 0$.
- (SM1) Assoziativität ($\cdot$): $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und alle $x \in X$
- (SM2) Einselement ($\cdot$): $1x = x$, für alle $x \in X$.
- (A&SM1) Distributivgesetz: $\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$, für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, und alle $x_1, x_2 \in X$.
- (A&SM2) Distributivgesetz: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, und alle $x \in X$.

Bemerkungen:

Der lineare Raum X muss abgeschlossen sein bezüglich Addition und Multiplikation. (implizite Bedingung)

$\rightarrow$ Bsp: $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1\}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in X$, aber $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin X$

Um zu beweisen, dass X ein linearer Raum ist, müssen **alle** Eigenschaften gezeigt werden. Mit bereits **einem Gegenbeispiel** kann man jedoch schon beweisen, dass das Gegebene kein linearer Raum ist.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass der Raum der komplexwertigen $m \times n$ Matrizen, also $\mathbb{C}^{m \times n}$, ein linearer Raum ist.

Als Beispiel überprüfen wir zwei Eigenschaften: (Den Rest rechnet man analog)

(A1) Kommutativität (+): $x + y = \begin{bmatrix} x_{11} + y_{11} & \dots & x_{1n} + y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} + y_{m1} & \dots & x_{mn} + y_{mn} \end{bmatrix} \stackrel{\text{Kommutativität skalarer Addition}}{=} \begin{bmatrix} y_{11} + x_{11} & \dots & y_{1n} + x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} + x_{m1} & \dots & y_{mn} + x_{mn} \end{bmatrix} = y + x$

(A&SM2) Distributivgesetz: $(\alpha + \beta)x = (\alpha + \beta) \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha + \beta)x_{11} & \dots & (\alpha + \beta)x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha + \beta)x_{m1} & \dots & (\alpha + \beta)x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_{11} + \beta x_{11} & \dots & \alpha x_{1n} + \beta x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha x_{m1} + \beta x_{m1} & \dots & \alpha x_{mn} + \beta x_{mn} \end{bmatrix}$

$= \alpha \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} = \alpha x + \beta x$

Lineare Unterräume

Definition: Ein linearer Unterraum ist eine **nichtleere Teilmenge** ($\tilde{X}$) eines linearen Raumes X , wenn folgende beide Eigenschaften gelten:

- (i) $x_1 + x_2 \in \tilde{X}$, für alle $x_1, x_2 \in \tilde{X}$.
- (ii) $\alpha x \in \tilde{X}$, für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und alle $x \in \tilde{X}$.

Bemerkung: Wenn 0 (das Nullelement in X) nicht in $\tilde{X}$ liegt, dann kann $\tilde{X}$ kein Unterraum von X sein, da die zweite Bedingung für $\alpha = 0$ nicht erfüllt sein kann.

Aufgabe 9

Zeigen Sie, dass der Raum aller Vektoren $\mathbf{v} = (v_1 \dots v_n)^T \in \mathbb{C}^n$, ausgestattet mit Addition und Multiplikation, die für eine gegebene Menge $\mathcal{I} = \{i_1, \dots, i_k\}$ mit $k \leq n$ die Bedingung $v_i = 0$, für alle $i \in \mathcal{I}$ erfüllen, ein linearer Unterraum von $\mathbb{C}^n$ ist.

Bsp. $n=4, \mathcal{I}=\{2,3\} \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \\ v_4 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \\ 0 \\ w_4 \end{bmatrix}$

Sei $W = \{ \vec{v} \in \mathbb{C}^n : v_i = 0, \text{ für } i \in \mathcal{I} \}$

(i) Seien $\vec{v}, \vec{w} \in W$. Per Definition von W gilt $v_i = w_i = 0$ für $i \in \mathcal{I}$

$$\Rightarrow (v+w)_i = v_i + w_i = 0 \text{ für } i \in \mathcal{I} \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in W$$

(ii) Sei $\vec{v} \in W, \alpha \in \mathbb{C}$. Per Definition von W gilt $v_i = 0$ für $i \in \mathcal{I}$

$$\Rightarrow (\alpha v)_i = \alpha v_i = 0 \text{ für } i \in \mathcal{I}$$

$\Rightarrow W$ ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{C}^n$

Basen in linearen Räumen

Lineare Unabhängigkeit

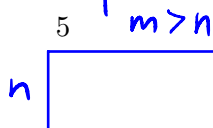
Definition: Eine Teilmenge $\{x_i\}_{i=1}^n$ des linearen Raumes X ist linear abhängig, wenn es zugehörige Skalare $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ gibt, die **nicht alle gleich Null** sind und so, dass

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0.$$

Wenn $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$ impliziert, dass $\alpha_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, dann ist die Teilmenge $\{x_i\}_{i=1}^n$ linear unabhängig.

Bemerkung: Um lineare Unabhängigkeit einer endlichen Menge an Vektoren zu überprüfen, kann man die Vektoren als **Spaltenvektoren** einer Matrix zusammenfassen und diese Matrix muss für lineare Unabhängigkeit **vollen Rang** haben.

Definition: Eine unendliche Menge von Vektoren ist linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist.

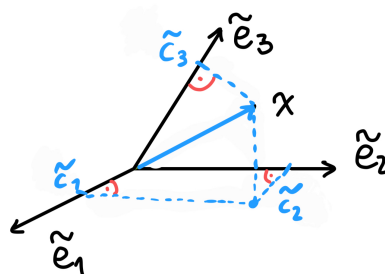
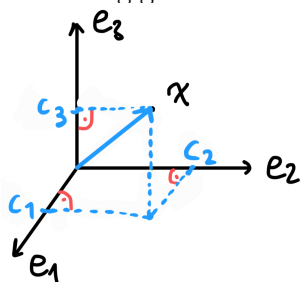


Basis

Die Basis eines linearen Raums X ist eine Menge von Vektoren in X , die linear unabhängig sind und jedes Element x des gesamten Raumes X durch eindeutige Linearkombination erzeugen können.

Formale Definition: Die Menge $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^M$, $\mathbf{e}_k \in \mathbb{C}^M$, ist eine Basis für $\mathbb{C}^M$, wenn:

1. $\text{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^M = \mathbb{C}^M$ *← $\text{span}\{\tilde{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^M$ ist der Raum aller Vektoren, die durch lin. Komb. von $\tilde{\mathbf{e}}_k$ darstellbar sind.*
2. $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^M$ linear unabhängig ist.



Facts:

Die Kardinalität aller Basen desselben Lin. Raumes ist immer gleich.
Anzahl Basisvektoren = Dimension des Lin. Raumes

$$\forall x \in X \quad \exists! c_1, \dots, c_M, \text{ sodass } c_1 \mathbf{e}_1 + \dots + c_M \mathbf{e}_M = x$$

Dabei sind $c_1, \dots, c_M$ die **Koordinaten** von x in der gegebenen Basis. Diese Koordinaten erhält man durch **orthogonale Projektion** auf die Basisvektoren. Man nennt sie auch **Entwicklungskoeffizienten**. Diese berechnet man wie folgt:

$$c_k := \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle, \quad k = 1, \dots, M$$

Wir definieren die **Analysematrix**

$$\mathbf{T} := \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^H \\ \vdots \\ \mathbf{e}_M^H \end{bmatrix}, \quad \text{sodass man als Koordinaten } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^H \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_M^H \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_M \rangle \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{x}, \text{ erhält.}$$

Die Analysematrix $\mathbf{T}$ sollte vollen Rang haben und quadratisch sein.

Dimensionsbegriff

Die Dimension M eines linearen Raumes X ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Elemente in diesem linearen Raum. Dies entspricht der Anzahl Basiselemente jeder Basis dieses linearen Raumes. Wenn es kein solches endliches M gibt, dann ist X unendlich-dimensional.

Beispiel

$\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\Rightarrow c_1 = \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle = \langle \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = 4$
 c_2, c_3 analog

Anderen Basisvektor: $\vec{e}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow c_1' = \langle \vec{x}, \vec{e}_1' \rangle = \langle \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle = \frac{9}{\sqrt{2}}$

Orthonormalbasis

Falls alle Basisvektoren paarweise orthogonal zueinander stehen und Norm 1 haben, so spricht man von einer Orthonormalbasis.

Duale Basen

Eine Menge $\{\tilde{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^M$, $\tilde{\mathbf{e}}_k \in \mathbb{C}^M$, $k = 1, \dots, M$ heisst dual zu einer Basis $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^M$, wenn:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^M \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle \tilde{\mathbf{e}}_k, \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^M$$

es gilt auch $\vec{x} = \sum_{k=1}^M \langle \vec{x}, \vec{\tilde{e}}_k \rangle \vec{\tilde{e}}_k$

In anderen Worten suchen wir eine andere Basis, sodass wir mit den gleichen Koordinaten den Vektor $\mathbf{x}$ konstruieren können.

Die duale Basis einer Orthonormalbasis ist sie selbst. $\tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{e}_k$, für alle $k = 1, \dots, M$

Dies ist einfach zu sehen, da in diesem Fall $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^M \underbrace{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle}_{c_k} \mathbf{e}_k$ gilt. $= \sum_{k=1}^M c_k \vec{e}_k$

Ansonsten verwendet man eine Synthesematrix $\tilde{\mathbf{T}}^H = [\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_1]$.

Indem man $\tilde{\mathbf{T}}^H = \mathbf{T}^{-1}$ setzt, zeigt dies nun, dass man zu $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^M$ eine duale Basis $\{\tilde{\mathbf{e}}_k\}_{k=1}^M$ finden kann, denn dann haben wir:

← T ist invertierbar, weil $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^M$ eine linear unabh. Menge ist $\Rightarrow T$ hat vollen Rang $\Rightarrow$ invertierbar

$$\tilde{\mathbf{T}}^H \mathbf{T} \mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_1] \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^M \underbrace{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle}_{c_k} \tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{x}, \quad \text{wie gewünscht.}$$

Im Falle eines Orthonormalsystems ist $\mathbf{T}$ unitär. $\Rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^H \xRightarrow{\tilde{\mathbf{T}}^H = \mathbf{T}^{-1}} \tilde{\mathbf{T}}^H = \mathbf{T}^H \Rightarrow \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}$

Im Falle eines Orthonormalsystems ist somit $\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}} \Rightarrow$ ONB sind selbst-dual

Für allgemeine Basen ist dies nicht der Fall:

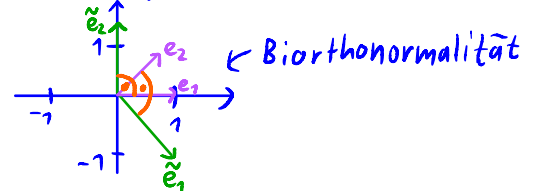
Aber die dualen Basen haben eine interessante Eigenschaft: Biorthogonalität

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} = \mathbf{I}_M \Rightarrow \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}_M \xRightarrow{\mathbf{T}^{-1} = \tilde{\mathbf{T}}^H} \mathbf{T} \tilde{\mathbf{T}}^H = \mathbf{I}_M = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^H \\ \vdots \\ \vec{e}_M^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \dots & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_M \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{e}_M, \vec{e}_1 \rangle & \dots & \langle \vec{e}_M, \vec{e}_M \rangle \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{e}_k, \vec{e}_{k'} \rangle = \delta_{kk'} = \begin{cases} 1, & k=k' \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \{\vec{e}_k\}_{k=1}^M \text{ und } \{\vec{\tilde{e}}_k\}_{k=1}^M \text{ sind biorthonormal.}$$

Bsp. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{[1 \ 0]^H, [1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^H\}$, $\{\vec{\tilde{e}}_1, \vec{\tilde{e}}_2\} = \{[1 \ -1]^H, [0 \ \sqrt{2}]^H\}$

$$\begin{bmatrix} \vec{\tilde{e}}_1^H \\ \vec{\tilde{e}}_2^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2$$



Reminder:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Aufgabe 11

Es seien:

$$\Phi_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \text{ mit } \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\} \text{ mit } \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

- Bestimmen Sie die zu Φ_1 und Φ_2 zugehörigen Matrizen $\mathbf{T}_1$ und $\mathbf{T}_2$.
- Begründen Sie, warum es sich sowohl bei Φ_1 als auch bei Φ_2 um eine Basis handelt.
- Bestimmen Sie die dualen Basen $\tilde{\Phi}_1$ und $\tilde{\Phi}_2$.
- Sind die Basen $\tilde{\Phi}_1$ und $\tilde{\Phi}_2$ normerhaltend? Begründen Sie ihre Antwort.

$$a) \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^H \\ \mathbf{e}_2^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^H \\ \mathbf{f}_2^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- b) Es handelt sich um Basen, da die Matrizen $\mathbf{T}_1$ und $\mathbf{T}_2$ vollen Rang (=2) haben. Dies folgt z.B. aus $\det(\mathbf{T}_1) = 1/2 \neq 0$, $\det(\mathbf{T}_2) = 1 \neq 0$ oder aus dem Fakt, dass die Spaltenvektoren von $\mathbf{T}_1$ linear unabhängig sind (ebenso für $\mathbf{T}_2$).

$$c) \quad \tilde{\mathbf{T}}_1^H = \mathbf{T}_1^{-1} \\ \mathbf{T}_1^{-1} = \frac{1}{1/2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}_1^H = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_1^H \\ \tilde{\mathbf{e}}_2^H \end{bmatrix}^H \Rightarrow \tilde{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{T}}_2^H = \mathbf{T}_2^{-1} \\ \mathbf{T}_2^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{T}}_2^H = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_1^H \\ \tilde{\mathbf{f}}_2^H \end{bmatrix}^H \Rightarrow \tilde{\mathbf{f}}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{f}}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

- e) $\tilde{\Phi}_1$ ist nicht normerhaltend, da $\mathbf{T}_1$ keine orthonormale Matrix ist.
 $\tilde{\Phi}_2$ ist normerhaltend, da $\mathbf{T}_2$ eine orthonormale Matrix ist.

Funktionsräume

Für eine nichtleere Menge S definiert man den linearen Raum X als Menge aller Funktionen von S nach $\mathbb{C}$, wobei die Addition und die skalare Multiplikation wie folgt definiert sind:

$$(+)\ \forall x_1, x_2 \in X \quad + : X \times X \rightarrow X \quad (x_1 + x_2)(s) = x_1(s) + x_2(s) \quad \forall s \in S$$

$$(\cdot)\ \forall \alpha \in \mathbb{C}, x \in X \quad \cdot : \mathbb{C} \times X \rightarrow X \quad (\alpha \cdot x)(s) = \alpha x(s)$$

Norm

Definition: Eine reelle Funktion $\|\cdot\|$, definiert auf einem linearen Raum X , ist eine Norm auf X , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(N1) Nichtnegativität: $\|x\| \geq 0$, für alle $x \in X$

(N2) Dreiecksungleichung: $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$, für alle $x_1, x_2 \in X$

(N3) Homogenität: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, für alle $x \in X$

(N4) Definitheit: $\|x\| = 0$ dann, und nur dann, wenn $x = 0$

Normierte Lineare Räume

Definition: Ein normierter linearer Raum ist ein Paar $(X, \|\cdot\|)$ bestehend aus einem linearen Raum X und einer Norm auf X .

Beispiele für normierte lineare Räume:

- linearer Raum $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit einer der folgenden Normen:

$$\text{Summennorm (1-Norm):} \quad \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\text{Euklidische Norm (2-Norm):} \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

$$\text{p-Norm:} \quad \|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} \text{ für } 1 \leq p < \infty$$

$$\text{Maximumsnorm:} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

- linearer Raum $L^p := \{x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt < \infty\}$ mit der Norm $\|x\|_{L^p} := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$
- linearer Raum $l^p := \{x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^p < \infty\}$ mit der Norm $\|x\|_{l^p} := \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^p \right)^{1/p}$

In einem normierten linearen Raum können wir den Abstand zwischen zwei Elementen mit der Norm messen:

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad d(x_1, x_2) := \|x_1 - x_2\|$$

Überblick über die Grundlagen aus der Linearen Algebra für SST1

Eigenwerte

Ist V ein Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ eine Abbildung, so bezeichnet man $v \in V$ mit $v \neq 0$ für $f(v) = \lambda v$ als Eigenvektor. Der Skalar λ ist der dazugehörige Eigenwert.

In $\mathbb{R}^n$ (bzw $\mathbb{C}^n$): Ein Eigenwert λ einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ ist ein Skalar, für den gilt:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Um alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ zu finden, löst man:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Eine $n \times n$ Matrix hat mindestens einen Eigenwert und kann bis zu n verschiedene Eigenwerte haben. Bei der Betrachtung von Dreiecksmatrizen sind die Eigenwerte die Elemente auf der Hauptdiagonalen. Damit ist die Determinante auch das Produkt der Eigenwerte.

Komplexe Eigenwerte einer reellen Matrix kommen als komplex konjugierte Paare vor. (i.e.: Wenn λ ein komplexwertiger Eigenwert der reellen Matrix $\mathbf{A}$ ist, dann ist auch λ^* ein Eigenwert von $\mathbf{A}$.)

Die **algebraische Multiplizität** eines Eigenwertes ist gleich der Ordnung der Nullstelle dieses konkreten Eigenwertes in der charakteristischen Gleichung.

Die **geometrische Multiplizität** eines bestimmten Eigenwertes entspricht der Dimension des jeweiligen Eigenraums. Es gilt immer: $1 \leq GM \leq AM$

Diagonalisieren einer Matrix

Eine Matrix $\mathbf{A}$ ist nur dann diagonalisierbar, wenn für alle Eigenwerte gilt: $GM = AM$. Ist dies der Fall, so berechnet man die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ und schreibt diese in eine Diagonalmatrix wie folgt:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Anschliessend berechnet man die Eigenvektoren und schreibt sie Spaltenweise in eine Matrix $\mathbf{S}$ (gleiche Reihenfolge wie die Eigenwerte):

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{s}_n]$$

Damit ergibt sich die Diagonalisierung

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$$

Normale Matrizen

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (bzw. $\mathbb{C}^{n \times n}$) heisst normal, falls sie $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ (bzw. $\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$) erfüllt.

(Komplexe) Normale Matrizen sind unitär diagonalisierbar. (Spektralsatz)

Orthogonale Matrizen

Eine reelle quadratische Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst orthogonal, falls

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$$

Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit

$$\mathbf{q}_i^T \cdot \mathbf{q}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

wobei $\mathbf{q}_i$ die Spaltenvektoren von $\mathbf{Q}$ sind und δ_{ij} das Kronecker delta bezeichnet.

Die Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix bilden somit eine Orthonormalbasis des Koordinatenraums $\mathbb{R}^n$. Dies gilt auch für die Zeilenvektoren, denn wenn $\mathbf{Q}$ orthogonal ist, so ist auch $\mathbf{Q}^T$ orthogonal.

Für Orthogonalität reicht nicht aus, dass die Spaltenvektoren paarweise orthogonal sind. Die Spaltenvektoren müssen zusätzlich auch normiert sein.

Orthogonale Matrizen sind längen- und winkeltreu, d.h.:

$$\|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2, \quad \langle \mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{Q}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

Der Betrag der Determinante einer orthogonalen Matrix ist stets 1. ($|\det \mathbf{Q}| = 1$)

Die Eigenwerte einer orthogonalen Matrix sind nicht notwendigerweise alle reell, haben jedoch stets den Betrag 1 und sind somit von der Form: $\lambda = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$

Orthogonale Matrizen sind normal, da $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$ und somit unitär diagonalisierbar. (Spektralsatz)

Unitäre Matrizen

Eine Unitäre Matrix ist eine Matrix, bei welcher gilt:

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{Q}^H = \mathbf{Q}^{-1}$$

(Dieses Konzept ist das komplexe Analogon zu Orthogonalität.)

Ähnliche Matrizen

Zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind ähnlich, falls eine invertierbare Matrix $\mathbf{S}$ existiert, sodass

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$$

Im Fall einer Diagonalisierung ist also die Matrix $\mathbf{A}$ ähnlich zu ihrer Diagonalmatrix $\mathbf{D}$. Ähnliche Matrizen haben die gleichen Eigenwerte und somit das gleiche charakteristische Polynom.

Symmetrische Matrizen

Falls, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, so ist $\mathbf{A}$ eine symmetrische Matrix. (Analog: Falls $\mathbf{A}$ komplexwertig ist und $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$, so ist $\mathbf{A}$ hermite-symmetrisch)

Symmetrische Matrizen sind normal, denn es gilt trivialerweise $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$

Symmetrische Matrizen haben stets reelle Eigenwerte und paarweise orthogonale Eigenvektoren.

Jede symmetrische Matrix lässt sich durch orthogonale Transformationen diagonalisieren.

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$$

Singulärwertzerlegung

Die SVD zerlegt eine beliebige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in zwei orthogonale Matrizen $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Matrix $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit den Singulärwerten auf der Hauptdiagonalen.

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_r & \mathbf{U}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_r^T \\ \mathbf{V}_k^T \end{bmatrix}$$

Es ist dabei $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$. Diese Werte sind absteigend sortiert.

Gegeben eine SVD einer Matrix $\mathbf{A}$, so gilt:

- $\text{Rang}(\mathbf{A}) = \text{Anzahl Singulärwerte} > 0$
- $\dim(\mathbf{A}) = \dim(\mathbf{\Sigma})$
- ONB von $\text{Bild}(\mathbf{A}) = \text{span}\{u_1, \dots, u_r\}$
- ONB von $\text{Kern}(\mathbf{A}) = \text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$