Kinematik

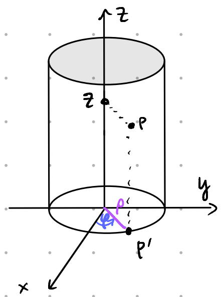
Koordinatenumwandlungen:

Kartesisch ↔ Zylinderkoordinaten:

$x = \cos(\varphi)\cdot\rho$
$y = \sin(\varphi)\cdot\rho$ ↔
$z = z$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ (*)
$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = z$

(*) Fallunterscheidung:
$x, y > 0$: $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$x < 0$, y beliebig: $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180°$
$x > 0, y < 0$: $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 360°$



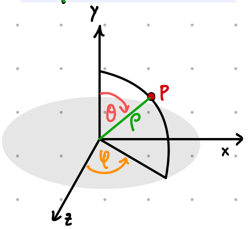
Einheitsvektoren:

$\underline{e}_\rho = \cos(\varphi)\underline{e}_x + \sin(\varphi)\underline{e}_y$
$\underline{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\underline{e}_x + \cos(\varphi)\underline{e}_y$
$\underline{e}_z = \underline{e}_z$

Kartesisch ↔ Kugelkoordinaten:

$x = \rho\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi)$
$y = \rho\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi)$ ↔
$z = \rho\cdot\cos(\theta)$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right)$



Einheitsvektoren:

$\underline{e}_1 = \underline{e}_\rho = \underline{e}_x \sin\theta\cos\varphi + \underline{e}_y \sin\theta\sin\varphi + \underline{e}_z\cos\theta$
$\underline{e}_2 = \underline{e}_\theta = \underline{e}_x\cos\theta\cos\varphi + \underline{e}_y\cos\theta\sin\varphi - \underline{e}_z\sin\theta$
$\underline{e}_3 = \underline{e}_\varphi = -\underline{e}_x\sin\varphi + \underline{e}_y\cos\varphi$

Geschwindigkeit ($\underline{v}$) / Schnelligkeit (v):

$\boxed{\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t)}$ $\boxed{v = |\underline{v}|}$

Kartesisch: $\underline{r} = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$

$\Rightarrow \underline{v} = \dot{x}\underline{e}_x + \dot{y}\underline{e}_y + \dot{z}\underline{e}_z$, $\quad v = |\underline{v}| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$

Zylindrisch: $\underline{r} = \rho\underline{e}_\rho + z\underline{e}_z$

$\Rightarrow \boxed{\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{z}\underline{e}_z} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\underline{e}}_\rho + \dot{z}\underline{e}_z$

$v = |\underline{v}| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$

SdpG: $\boxed{v_P' = v_Q'}$

$\Rightarrow \boxed{\underline{v}_P\cdot\underline{r}_{PQ} = \underline{v}_Q\cdot\underline{r}_{PQ}}$

$\Rightarrow \boxed{(\underline{v}_P - \underline{v}_Q)\cdot\underline{r}_{PQ} = (\underline{r}_P - \underline{r}_Q)\cdot(\underline{v}_P - \underline{v}_Q) = 0}$

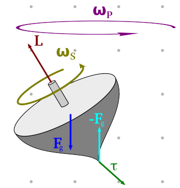
⚠ alle SKs erfüllen SdpG.

Ebene Bewegung:

→ alle $\underline{v}$ parallel zu geg. Ebene $(v_z = 0)$
→ alle Pkte auf Normalen zur Ebene besitzen gleiche $\underline{v}$.
→ Ebene Bewegung ist momentan immer:

i) **Translation**: $\boxed{\underline{v}_P = \underline{v}}$; $\forall P\ (\underline{v}_P = \underline{v}_Q)$
ii) **Rotation**: $\boxed{\underline{v}_P = \underline{v}_Q = 0}$
↳ PQ ist Rotationsachse

Räumliche Bewegungen:

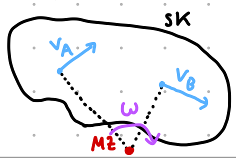


Kreiselung: momentan eine Rotation (ein Pkt. bleibt fix).

Kreiselung + Translation ⇒

SK-Formel:

$\boxed{\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{\omega}\times\underline{r}_{BA}}$



Kinemate: $\boxed{\{\underline{v}_B, \underline{\omega}\}}$

$\underline{v}_B$: Translationsgeschwindigkeit des Pkt. B
$\underline{\omega}$: Rotationsgeschwindigkeit des SK

Invarianten: = überall gleich im SK

vektorielle Invariante: $\boxed{\underline{I}_1 = \underline{\omega}}$
skalare Invariante: $\boxed{I_2 = \underline{\omega}\cdot\underline{v}_B}$

	$I_2 = 0$	$I_2 \neq 0$
$\underline{I}_1 = 0$	Translation/ Stillstand	—
$\underline{I}_1 \neq 0$	Rotation	Schraubung

Zentralachse = Achse in Richtung von ω.

$\boxed{M_O = \pm dF}$ d = kürzester Abstand von O zur Wirkungslinie

Wenn $\underline{R} = \underline{0}$, dann ist das resultierende Moment unabhängig vom Bezugspunkt

$\boxed{\underline{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i}$ $\left(= \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_O(P_i)\right)$ $\boxed{+\underline{M}_{Körper}}$

↳ res. Moment bezüglich Pkt O.

$\boxed{\underline{M}_P = \underline{M}_O + \underline{r}_{PO}\times\underline{R}}$ Transformationsregel

Leistung:

$\underline{F}\cdot\underline{v} = F\cdot v\cdot\cos\alpha$

Leistung einer Kraft: $\boxed{P = \underline{F}\cdot\underline{v}_Q}$
Q: Angriffspunkt der Kraft
Leistung eines Moments: $\boxed{P = \underline{M}_O\cdot\underline{\omega}}$ im Falle einer reinen Rotation

Gesamtleistung:

$\boxed{P_{tot} = \sum_i \underline{F}_i\cdot\underline{v}_i + \sum_i \underline{M}_i\cdot\underline{\omega}_i}$ $= \sum_i P_i$

falls Kinemate $\{\underline{v}_B, \underline{\omega}\}$ bekannt: $\boxed{P_{tot} = \underline{R}\cdot\underline{v}_B + \underline{M}_B\cdot\underline{\omega}}$
⚠ gilt nur für Betrachtung von einem SK!
⚠ Kräfte dürfen entlang Wirkungslinie verschoben werden!

Äquivalenz & Reduktion v. Kräftegruppen:

statische Äquivalenz: $\boxed{P(\{\underline{F}_i\}) = P(\{\underline{G}_i\})}$
$\forall$ SK-Bewegungen

2 Kräftegruppen sind statisch äquivalent wenn:
- Die Resultierende & das resultierende Moment gleich sind
- Sie vektoriell gleich sind & ihre Wirkungslinien übereinstimmen.

Dyname einer Kräftegruppe: $\boxed{\{\underline{R}, \underline{M}_O^{tot}\}}$
bezüglich Pkt. O

$\underline{R}$: Resultierende Kraft, bezugspunktunabhängig
$\underline{M}_O$: Moment bzg. des Pkt O

Invarianten: (überall gleich im SK)

vektorielle Invariante: $\boxed{\underline{I}_1 = \underline{R}}$ unabhängig von Bezugspunkt
skalare Invariante: $\boxed{I_2 = \underline{R}\cdot\underline{M}_O^{tot}}$

→ Nullsystem: $\underline{R} = \underline{0}$; $\underline{M}_O = \underline{0}$ $(I_1 = 0, I_2 = 0)$
→ Kräftepaar/Moment: $\underline{R} = \underline{0}$; $\underline{M}_O \neq 0$ $(I_2 = 0)$
→ Einzelkraft: $\underline{R} \neq \underline{0}$; $I_2 = 0$
→ Schraube: $I_2 \neq 0$

Starre Körper (SK)

$\overline{PQ} = \text{const.}\quad \forall P, Q \in SK$

Freiheitsgrad (# unabhängige Bewegungen)
= # Rotationsgeschw. + # Translationsgeschw.

$\boxed{f = n - b}$

n = Summe der Freiheitsgrade der einzelnen SK
b = Summe der Bindungsgleichungen

f in $\mathbb{R}^2$	f in $\mathbb{R}^3$	Objekt
2	3	Punkt
3	5	Stab
3	6	beliebiger SK

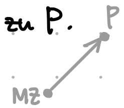
\# Bindungsgleichungen:
: 2
: 1
Gelenk: (# verb. SK − 1)·2
Einspannung: 3
Rollen ohne Gleiten: 2

Satz vom Momentanzentrum:

$\boxed{\underline{v}_P = \underline{\omega}\times\underline{r}_P}$; $\boxed{v_P = \omega\cdot r_P}$ wenn $\underline{\omega}\perp\underline{r}$ = immer in 2D.

$\underline{\omega}$ = Rotationsgeschwindigkeit, $\omega = \dot{\theta}$

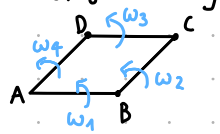
$\underline{r}_P$ = Verbindungsgerade vom MZ zu P.



($\underline{v}$ ist immer ⊥ zu $\underline{r}$ und $\underline{\omega}$.)

Polbahn = Bewegung des MZ.

Parallelogrammregel:



$\omega_1 = \omega_3$
$\omega_2 = \omega_4$

Kräfte: Resultierende Kraft $\underline{R}$:

$\boxed{\underline{R} = \sum_i \underline{F}_i}$ (unabhängig vom Bezugspunkt).

- zwei Kräfte sind statisch äquivalent, wenn sie in Betrag und Wirkungslinie übereinstimmen und am gleichen SK angreifen.

Moment:

$\boxed{\underline{M}_O(P) = \underline{r}_{OP}\times\underline{F}_P}$ (M von P bezüglich O)

$\underline{r}$: OP
P: Angriffspunkt der Kraft
O: Bezugspunkt

⚠ Momente sind vom Bezugssystem und vom Bezugspunkt abhängig.

Statik

Statische Bestimmtheit:

- statisch bestimmt: # GGW = # Unbekannte (Bindungskräfte)
- statisch unbestimmt: # GGW ≠ # Unbekannte

kinematische Bestimmtheit:

- kinematisch bestimmt: $f = 0$ (keine Bewegung)
- kinematisch unbestimmt: $f > 0$ (mögliche Bewegungen)

⇒ $f=0$ statisch bestimmt, kinematisch bestimmt

$f<0$ statisch unbestimmt, kinematisch bestimmt

$f>0$ statisch unbestimmt, kinematisch unbestimmt

Grad der statischen Unbestimmtheit $= b - n$

Hauptsatz der Statik:

In einer Ruhelage muss gelten:

$$\boxed{\underline{R}=\underline{0};\ \underline{M}_0=\underline{0}} \quad (*)$$

$\underline{R}=\underline{0}$: Komponentenbedingungen

$\underline{M}_0=\underline{0}$: Momentenbedingungen

↳ Bezugspunkt egal, da $\underline{R}=\underline{0}$

Zusatzbedingungen: Reibung, Seil, Kippen, ...

(*) Bedingung ist für bewegliche/deformierbare Körper und Systeme aus mehreren SK notwendig aber nicht hinreichend (Ruhelage ⇒ $\underline{R}=\underline{0}=\underline{M}_0$, ⇍), für einzelne SK notwendig und hinreichend (⇔)

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{cases} KB(x)=0=\dots \\ KB(y)=0=\dots \\ KB(z)=0=\dots \end{cases} \quad \begin{cases} MB(x)=0=\dots \\ MB(y)=0=\dots \\ MB(z)=0=\dots \end{cases}$$

nur in 3D

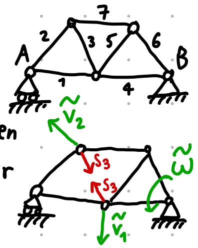
Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL)

$\boxed{\tilde{\mathcal{P}}=\tilde{\mathcal{P}}^{(i)}+\tilde{\mathcal{P}}^{(a)}=0}$, $\forall \{\tilde{\underline{v}}\}$ ⇔ Ruhelage

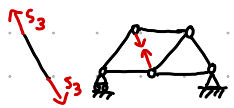
$\{\tilde{\underline{v}}_0, \tilde{\underline{\omega}}\}$: virtueller Bewegungszustand

PdvL: $\boxed{\tilde{\mathcal{P}}_{tot}=\sum_i \underline{F}_i\cdot\tilde{\underline{v}}_i+\sum_i \underline{M}_i\cdot\tilde{\underline{\omega}}_i=0}$ (*)

PdvL für Stabkräfte:



1. Stab mit gesuchter Stabkraft entfernen und Stabkraft einführen
2. virtuelle Bewegung einführen i.d.R. Rotation um Festlager
3. nötige (Winkel-)Geschwindigkeiten berechnen
4. Gesamtleistung der Bewegung berechnen und gleich null setzen. (*)
5. Nach gesuchter Stabkraft auflösen.
6. Bestimmen, ob Druckstab oder Zugstab: Da Stabkraft so eingeführt wurde:



$\boxed{\begin{array}{l} S_3 \geq 0 \Rightarrow \text{Zugstab} \\ S_3 \leq 0 \Rightarrow \text{Druckstab} \end{array}}$

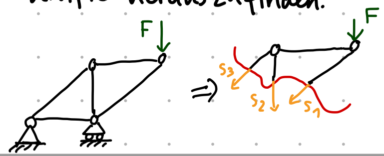
Kräfteschnitt:

mehrere Stabkräfte gleichzeitig bestimmen.

① System dort "schneiden", wo man die Stabkräfte bestimmen will.

② alle Kräfte im Freischnitt einzeichnen:
↳ äussere Kräfte
↳ innere Kräfte (greifen an Schnittstellen an)

③ HS anwenden, um die gesuchten Kräfte herauszufinden.



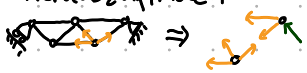
Knotengleichgewicht:

alle Stabkräfte eines Systems bestimmen

① alle Knoten freischneiden

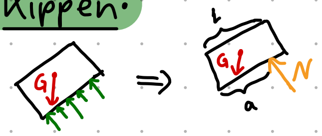
② alle an diesem Knoten angreifenden Kräfte einzeichnen.
↳ äussere Kräfte (Bindungskräfte)
↳ innere Kräfte (Stabkräfte)

③ HS anwenden, um die gesuchten Kräfte herauszufinden



C_ξ (bekannt)

Kippen:



Die Gruppe aus verteilten (parallelen) Normalkräften ist statisch äquivalent zu einer Einzelkraft $\underline{N}$ mit unbekanntem Angriffspunkt.

⇒ Angriffspunkt aus GGW bestimmen

Standfläche: kleinste konvexe Fläche, die die Berührungsfläche umschliesst.

Kippbedingung: Ein System ist standfest (kein Kippen), wenn der Angriffspunkt der Normalkraft innerhalb der Standfläche liegt.

Reibung:

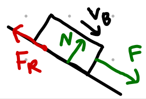
Haftreibung ($v_B = 0$)

$$\boxed{|\underline{F}_R| \leq \mu_0 |\underline{N}|}$$

liefert erst nachträglich ein Kriterium, dass Ruhe wirklich möglich ist.

Gleitreibung ($v_B \neq 0$)

$$\boxed{|\underline{F}_R| = \mu_1 |\underline{N}| \quad \text{bzw.} \quad \underline{F}_R = -\mu_1 |\underline{N}| \frac{\underline{v}_B}{|\underline{v}_B|}}$$



liefert zusätzliche Gleichung

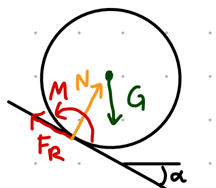
Rollwiderstandsgesetz

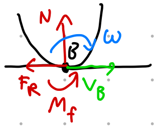
Ruhe:

$\boxed{|\underline{M}_f| \leq \mu_2 |\underline{N}|}$ zusätzliches Kriterium

Bewegung:

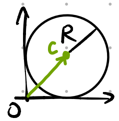
$$\boxed{|\underline{M}_f| = \mu_2 |\underline{N}| \quad \text{bzw.} \quad \underline{M}_f = -\mu_2 |\underline{N}| \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|}}$$



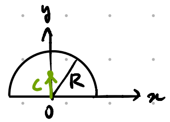


ideal rau: $\mu_0 = \infty$; $\mu_2 = 0$ (z.B. Zahnrad)

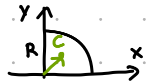
Schwerpunktberechnung:



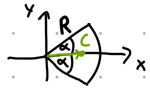
$\underline{r}_C = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}$ $A = \pi r^2$



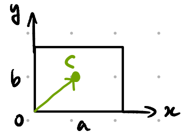
$\underline{r}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4R}{3\pi} \end{pmatrix}$ $A = \frac{1}{2}\pi r^2$



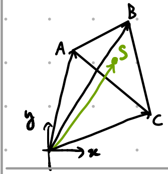
$\underline{r}_C = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\pi} R \\ \frac{4}{3\pi} R \end{pmatrix}$ $A = \frac{1}{4}\pi r^2$



$\underline{r}_C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} R \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$ $A = \alpha r^2$, $[\alpha] = \text{RAD}$



$\underline{r}_{OS} = \begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \end{pmatrix}$ $A = a \cdot b$



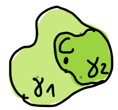
$\underline{r}_S = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}}{3}$ $A = \frac{1}{2} AC \cdot h_B$

zusammengesetzte Flächen bei homogener Masseverteilung:

$$\boxed{\underline{r}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{r}_i \Leftrightarrow \underline{r}_A = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} A_i \vec{r}_i}$$

bzw. $x_s = \frac{\sum_i x_i \cdot A_i}{\sum_i A_i}$, $y_s = \frac{\sum_i y_i \cdot A_i}{\sum_i A_i}$

Körper mit verschiedenen Dichten:



$\underline{r}_C = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \gamma_i A_i} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \underline{r}_{C_i} A_i$

z.B.: $\underline{r}_C = \frac{\gamma_1 \underline{r}_{C_1} A_1 + \gamma_2 \underline{r}_{C_2} A_2}{\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2}$

Kräftemittelpunkt C:

($\underline{r}_A = \underline{r}_{OA}$)

$\boxed{\underline{r}_C = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{N} F_i \underline{r}_i}$ mit $R = \sum_{i=1}^{N} F_i$

auch Schwerpunkt / Massenmittelpunkt

Lagerreaktionen (2D): 3D:

Auflager (einseitig) *Loslager*	P	N > 0, P; F_y
Auflager (beidseitig) *Loslager*	P	N, P; A_y
Auflager (beidseitig) *Kurzes Querlager* *Loslager*	P; P	N, P; A_y, A_z
Gelenk *Festlager*	P	B, A, P; A_y, A_x, A_z
Gelenk	P; P	B, P, A; =
Gelenk (zwei gelenkig verbundene Balken)	P	B, P, A; =
Einspannung keine Rotation möglich	P; P	M, B, P, A; M_y, A_y, A_z, A_x, M_z, M_x
Faden / Seil	P	S > 0, P; = 3D
Pendelstütze (Modellannahme: äussere Kräfte nur in den Gelenken)	P	S, P; = 3D
Parallelführung	P	M, P, A; M, F_x
Langes Querlager, Schiebehülse	P	A, P, M; A_y, M_y, A_z, M_z
Längs- und kurzes Querlager	P	A, P, N > 0; A_x, $A_x < 0$

Dipolmoment: $\boxed{N = \sum_{i=1}^{N} F_i \underline{r}_i}$ Skalar

$\underline{M} = \underline{N} \times \underline{e}$ ($\underline{e}$ von $\underline{R}$)

N/Moment unabhängig vom Bezugspkt.

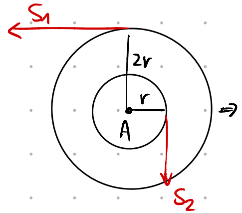
beim E-Feld:

$\underline{E} = E \cdot \underline{e}$, $\underline{N} = E \cdot \underline{P}$,

$\underline{R} = 0 \Rightarrow$ Gesamtladung $= 0$

$\underline{F}_i = q_i \cdot \underline{E}$, $\underline{P} = \sum_{i=1}^{N} q_i \underline{r}_i =$ Dipolmoment der Punktladungsgruppe

$\underline{M} = \underline{N} \times \underline{e} = E \cdot \underline{P} \times \underline{e}$



$S_1 \neq S_2$

$\Rightarrow M(A): 2rS_1 - rS_2 = 0$

$S_1 = \frac{1}{2} S_2$

Flaschenzüge

1. HS

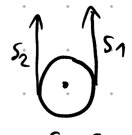
2. PdvL

3. (Notfall)

$F_Z = \frac{1}{n} \cdot F_G$

$n = \#$ tragende Seile

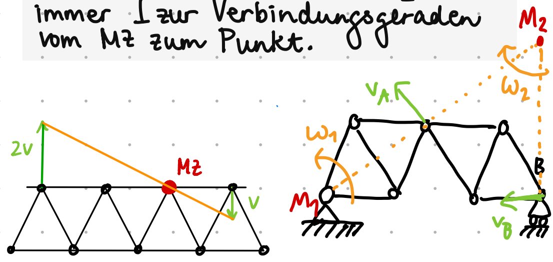
in Statik:



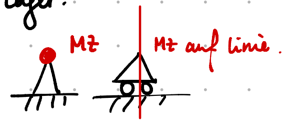
$S_1 = S_2$

Momentanzentrum finden:

⇒ Mittels Normalen von $\underline{v}$ von Pkten, die zu mehreren SK's gehören, die MZ's der weiteren SK's finden (durch Konstruktion) ↳ $\underline{v}$ ist immer ⊥ zur Verbindungsgeraden vom MZ zum Punkt.



Lager:



Dynamik:

Beschleunigung:

$\boxed{\underline{a} = \underline{\dot{v}} = \underline{\ddot{r}}}$

Kartesisch:

$\underline{a} = \ddot{x}\underline{e}_x + \ddot{y}\underline{e}_y + \ddot{z}\underline{e}_z$

in Zylinderkoordinaten:

$\boxed{\underline{a} = \underline{\dot{v}} = \underline{\ddot{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\underline{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\underline{e}_\varphi + \ddot{z}\underline{e}_z}$

Kreisbewegung: (r = konstant) $\dot{r} = \ddot{r} = 0$

$\underline{v} = r\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi$

$\boxed{\underline{a} = -r\dot{\varphi}^2\underline{e}_r + r\ddot{\varphi}\underline{e}_\varphi}$

$r\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{r}$: radial nach innen gerichtet

$r\ddot{\varphi}$: tangentiale Komponente

Trägheitskräfte, PdvL:

↳ fiktiv. verletzen das Reaktionsprinzip.

Trägheitskraftdichte: $\underline{f}^{(t)} = -\rho\underline{a}$

ρ: spezifische Masse, Dichte $\rho = \rho(\underline{a})$

Trägheitskraft: $d\underline{F} = -\rho\underline{a}\,dV = -\underline{a}\,dm$

$\boxed{\underline{F}^{(t)} = \iiint d\underline{F}^{(t)} = -m \cdot \underline{a}}$

PdvL: $\boxed{\tilde{\mathcal{P}}^{(i)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(a)} + \tilde{\mathcal{P}}^{(t)} = 0, \forall \{\tilde{v}\}}$

Inertialsystem: wenn v = konst. $\Leftrightarrow a = 0$

↳ wie Statikaufgabe behandeln.

↳ PdvL gilt.

Masselose Systeme: Methoden der Statik ✓

} kein $\tilde{\mathcal{P}}^{(t)}$

Newton'sches Bewegungsgesetz:

$\boxed{m\underline{a} = \underline{R}}$ gilt $\forall$ Massepunkte

Komponentenweise:

$\boxed{\sum F_x = m\ddot{x}}$ $\boxed{\sum F_y = m\ddot{y}}$

→ ergeben DGL.

↳ Anfangsbedingungen nötig!

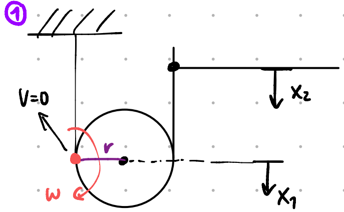
↳ oft: $\{x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ oder $\dot{x}(0) = v_0$

→ falls mehrere Körper → für jeden Körper aufstellen!

Kinematische Relationen:

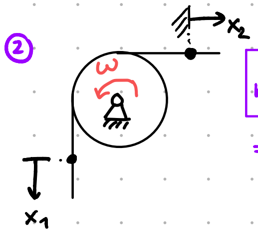
→ mehr Koordinaten als Freiheitsgrad, so sind diese voneinander abhängig.

→ Punkte finden, wo man kinematische Relationen aufstellen kann. Oft bei Rollen

① 

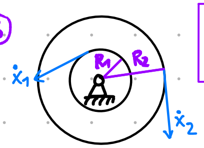
$\boxed{w = \frac{\dot{x}_1}{r} = \frac{\dot{x}_2}{2r}}$

$\Rightarrow 2\dot{x}_1 = \dot{x}_2$

② 

$\boxed{w = \frac{\dot{x}_1}{r} = -\frac{\dot{x}_2}{r}}$

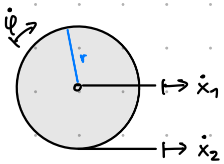
$\Rightarrow \dot{x}_1 = -\dot{x}_2$

③ 

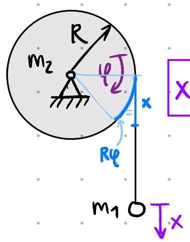
$\boxed{\dot{\varphi} = w = \frac{\dot{x}_1}{R_1} = -\frac{\dot{x}_2}{R_2}}$

$\Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{R_2}{R_1}\dot{x}_1$

$\Rightarrow x_2 = -\frac{R_2}{R_1}x_1 + k$

④ 

$\boxed{\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - r \cdot \dot{\varphi}}$

allgemein: 

$\boxed{x = R\varphi}$

$\omega = \dot{\varphi}$ = Rotationsgeschwindigkeit = Kreisfrequenz.

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ $\quad w = \frac{\varphi}{t} \rightsquigarrow \varphi(t) = wt$

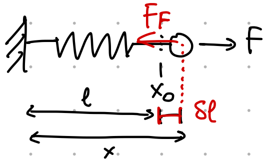
$T = \frac{2\pi}{w}$ = Periodendauer, $[T] = s$

Feder:

Federgesetz: $\boxed{|F| = c|\delta l|}$

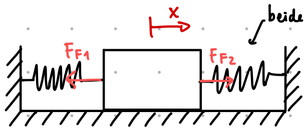
δl: Verlängerungsstrecke ($\delta l = x - l$)

c: Federkonstante



$\boxed{F_F = \pm cx}$

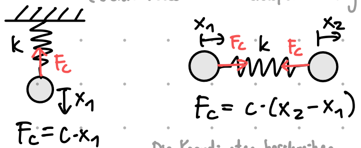
- Vorzeichen aufpassen:



$\boxed{F_{F_1} = +cx}$
$\boxed{F_{F_2} = -cx}$

- aufpassen, wo die Koordinate ist:

(beide Federn sind in entspannter Lage)

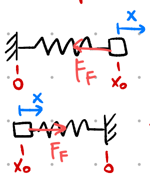


$F_c = c \cdot x_1$ $\quad F_c = c \cdot (x_2 - x_1)$

Die Koordinaten beschreiben die Bewegung der Massenpunkte!

- aufpassen, wo die entspannte Lage der Feder ist:

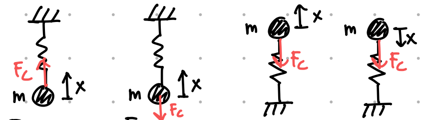
hier ist die entspannte Länge der Feder bei 0.



$F_F = c \cdot (x + x_0)$

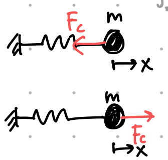
$F_F = -c(x - x_0)$

Beispiele: (Feder alle in entspannter Lage):



$F_c = -cx$ $\quad F_c = +cx$ $\quad F_c = cx$ $\quad F_c = -cx$

Federkraft in andere Richtung eingezeichnet ⇒ Vorzeichenwechsel!



$F_c = cx$

$F_c = -cx$

Bem: Feder verringern den Freiheitsgrad eines Systems nicht.

Differentialgleichungen:

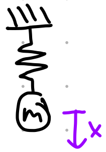
Ansätze:

$\ddot{x} = b$ $\Rightarrow x(t) = \frac{b}{2}t^2 + a_1 t + a_2$
$\ddot{x} = b - \omega^2 x$ $\Rightarrow x(t) = \frac{b}{\omega^2} + a_1\cos(\omega t) + a_2\sin(\omega t)$
$\ddot{x} = b + \omega^2 x$ $\Rightarrow x(t) = -\frac{b}{\omega^2} + a_1 e^{\omega t} + a_2 e^{-\omega t}$

a_1 und a_2 sind Konstanten und müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.

wichtige Gleichungen

- Federschwinger:



$m\ddot{x} = mg - kx \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = mg$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = g \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = g$

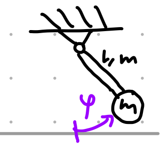
$\frac{k}{m} = \omega^2$ (Kreisfrequenz)

Lösungsansatz:

$x(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2}$

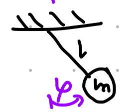
- Physikalischer Pendel:

$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\varphi = 0$

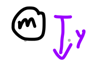


- Mathematischer Pendel:

$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$



- freier Fall:



$y(t) = \frac{1}{2}gt^2$, da $\ddot{y} = g$

Newton'sches Bewegungsgesetz:

$\boxed{m a = R}$ gilt ∀ Massepunkte

Komponentenweise:

$\boxed{\Sigma F_x = m\ddot{x}}$ $\boxed{\Sigma F_y = m\ddot{y}}$

→ ergeben DGL.
↳ Anfangsbedingungen nötig!
↳ oft: $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \text{ oder } \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$

→ falls mehrere Körper → für jeden Körper aufstellen!

Impuls:

Impuls: $\boxed{\underline{P} = m \cdot \underline{v}}$

Impulssatz: $\boxed{\dot{\underline{P}} = \underline{R}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

Erhaltungssatz: wenn $\boxed{\dot{p} = 0}$:
⇒ Impuls bleibt erhalten

$E_{kin} = \boxed{\frac{1}{2} m v^2}$

$\vec{R} = m\vec{a}$

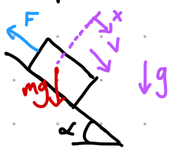
Anwendung: gleich wie Newton'sches Bewegungsgesetz.

Massenmittelpunktsatz: $\boxed{R = m a_c}$

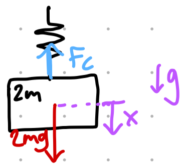
$\vec{a}_c$.. $\vec{a}$ von MMPkt. C
m.. Masse

→ beide unabhängig vom Bezugspunkt.
→ gilt für beliebige starre oder deformierbare Körper

Beispiele:



$m a_c = m\ddot{x}$
$= mg\sin(\alpha) - F$



$2m a_c = 2m\ddot{x}$
$= 2mg - F_c$

Drallsatz: $\boxed{\dot{\underline{L}}_0 = \underline{M}_0}$

$\vec{L}_0$.. Drall bezüglich Inertialpkt. O

aus $M_0 = \iiint_B \underline{r} \times \underline{a}\, dm$ $\quad L_0 = \iiint_B \underline{r} \times \underline{v}\, dm$

relativer Drallsatz:

Drall bezüglich C: $\boxed{\dot{\vec{L}}_c = \vec{M}_c}$

C=Massenmittelpunkt.

Drallsatz, Impulssatz & Massenmittelpunktsatz gelten ganz allgemein (also nicht nur für SKs).

Kinetik ebener Bewegungen

Drall bezüglich Inertialpunkt O:

$\boxed{L_0 = I_0 \omega = I_0 \dot{\varphi}}$

Drallsatz bezüglich Inertialpunkt O:

$\boxed{\dot{L}_0 = I_0 \ddot{\varphi} = I_0 \dot{\omega} = M_0^{tot}}$

Drall bezüglich Massenmittelpunkt C:

$\boxed{L_c = I_c \omega = I_c \dot{\varphi}}$

Drallsatz bezüglich Massenmittelpunkt C:

$\boxed{\dot{L}_c = I_c \ddot{\varphi} = I_c \dot{\omega} = M_c^{tot}}$

I_0, I_c = Massenträgheitsmomente bezüglich O und C

Massenträgheitsmoment

$I_0 = \iint_B r^2\, dm$ $\quad$ O = Fixpunkt, $r = r_{0dm}$

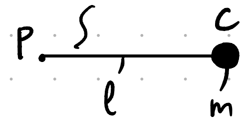
$I_c = \iint_B r'^2\, dm$ $\quad$ C = Schwerpunkt, $r' = r_{cdm}$

Wichtige Massenträgheitsmomente:

↳ konstant bei ebener SK-Bewegung.

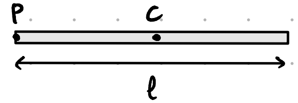
masselos

①



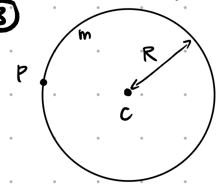
$I_c = 0$
$I_p = ml^2$

②



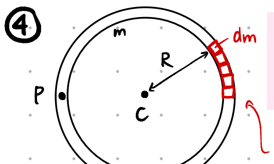
$I_c = \frac{1}{12} ml^2$
$I_p = \frac{1}{3} ml^2$

③



$I_c = \frac{1}{2} mR^2$
$I_p = \frac{3}{2} mR^2$

④



$I_c = mR^2$
$I_p = 2mR^2$

Summe aller dm's · R^2

$\iint R^2\, dm = mR^2$

→ Massenträgheitsmoment eines aus homogenen Teilen zusammengesetzten Körpers = Addition der einzelnen Massenträgheitsmomente.

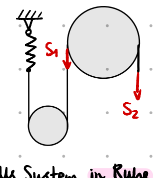
Satz von Steiner (Bezugspktwechsel):

$I_p = I_c + m r_{oc}^2$

⇝ $\vec{L}_0 = \vec{r}_c \times \vec{p} + \vec{L}_c$

$(\vec{p} = m\vec{v}_c)$

Bei Dynamikaufgaben ist i.A.



$S_1 \neq S_2$
↳ weil System ist nicht in Ruhe. (& wegen Feder)

→ Falls System in Ruhe, dann $S_1 = S_2$

Begriffe:

Dynamik
- Kinematik: Studium der Beschleunigungen und Geschwindigkeiten
- Kinetik: Frage nach Zusammenhang zw. den angreifenden Kräften & seiner Bewegung (also Dynamik & Kinematik)
→ Kräfte verändern Bewegungszustand

Inertialpunkt:
> Pkt, der in einem Inertialsystem ruht (d.h. darf nicht beschleunigt sein).

Massenträgheitsmoment (= Inertialmoment):
> Trägheit eines Körpers gegenüber einer Änderung seiner Winkelgeschwindigkeit bei der Drehung um eine gegebene Achse

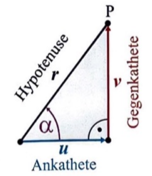
Herangehensweise Dynamikaufgabe:

- Massenmittelpunktssatz
  ↳ go to move, als erstes!
- Drallsatz
- PdvL
- Kinematische Relationen

Funktionen

5.8 Trigonometrische Funktionen

Rechtwinkliges Dreieck: $0° < \alpha < 90°$. (siehe S. 6)

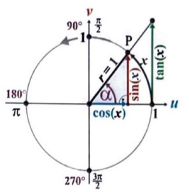


$\sin(\alpha) = \frac{v}{r} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos(\alpha) = \frac{u}{r} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

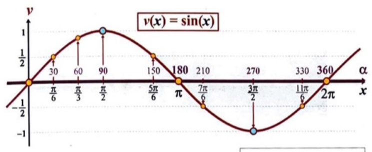
$\tan(\alpha) = \frac{v}{u} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Einheitskreis: $x,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

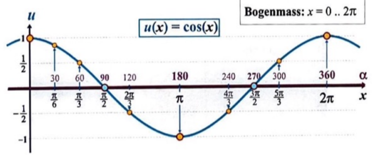


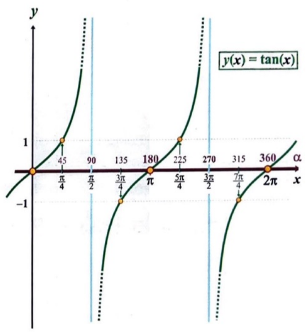
Bogenmass: $x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°}$ zu α gehörende **Bogenlänge** x am Einheitskreis.

▶ **Funktionsgraphen:**



Gradmass: $\alpha = 0..360°$
Bogenmass: $x = 0..2\pi$





▶ **Eigenschaften und spezielle Werte:**

	$0° \hat{=} 0$	$30° \hat{=} \frac{\pi}{6}$	$45° \hat{=} \frac{\pi}{4}$	$60° \hat{=} \frac{\pi}{3}$	$90° \hat{=} \frac{\pi}{2}$	Periode	Symmetrie
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$360° \hat{=} 2\pi$ $\sin(x+2\pi n) = \sin(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$ $\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$360° \hat{=} 2\pi$ $\cos(x+2\pi n) = \cos(x)$	$\cos(2\pi - x) = \cos(x)$ $\cos(-x) = \cos(x)$
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$(\pm\infty)$	$180° \hat{=} \pi$ $\tan(x+\pi n) = \tan(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$

Periodizität: $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) \leftrightarrow p = \frac{2\pi}{b}$

a = Amplitude, $p = \frac{2\pi}{b}$ = Periode, $c \Rightarrow$ Phasenverschiebung

$c > 0 \Rightarrow$ Verschiebung nach links, $c < 0$ nach rechts

Amplitude, Periode, Phasenverschiebung gilt auch für cos

$f(x) = a_1 \sin(b_1 x + c_1) + a_2 \cdot \sin(b_2 x + c_2) \leftrightarrow p = \text{kgV}\left(\frac{2\pi}{b_1}, \frac{2\pi}{b_2}\right)$

Ableitungen: $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

$f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$

$f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow f'(x) = g(x) \pm h(x)$

$f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) + h'(x)$

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$

$f(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$ ungerade Funktion	$\cos(-x) = \cos(x)$ gerade Funktion	$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$	$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$	$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$
$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$	$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$	$\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{\tan(x)}$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\tan(\pi + x) = \tan(x)$
$\sin(2\pi - x) = -\sin(x)$	$\cos(2\pi - x) = \cos(x)$	$\tan(2\pi - x) = -\tan(x)$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$	$\cos(2x) = \begin{cases} 2\cos^2(x) - 1 \\ \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 1 - 2\sin^2(x) \end{cases}$	$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$
$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$	$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$	$\tan(3x) = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$
$\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$	$\cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$	$\tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}$

$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$	$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}$
$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$	$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x) \cdot \tan(y)}$
$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \sin(\frac{x+y}{2}) \cdot \cos(\frac{x-y}{2})$	$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \cos(\frac{x+y}{2}) \cdot \sin(\frac{x-y}{2})$
$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cdot \cos(\frac{x+y}{2}) \cdot \cos(\frac{x-y}{2})$	$\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin(\frac{x+y}{2}) \cdot \sin(\frac{x-y}{2})$

Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

10.3 Ableitungen und Stammfunktionen:

$$\text{Stammfunktion } F(x) \underset{\text{integrieren}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} \text{Funktion } f(x) \underset{\text{integrieren}}{\overset{\text{ableiten}}{\rightleftarrows}} \text{1. Ableitung } f'(x)$$

$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $[n \neq -1]$	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln\lvert x \rvert$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
e^x	e^x	e^x
$x \cdot (\ln\lvert x \rvert - 1)$	$\ln\lvert x \rvert$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\frac{x}{\ln(a)} \cdot (\ln\lvert x \rvert - 1)$	$\log_a\lvert x \rvert$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

Beachte: Variable x in Bogenmass! Trigonometrische Funktionen siehe S. 19, 20.

$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln(\lvert \cos(x) \rvert)$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$x \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$

5.7 Exponential- und Logarithmusfunktionen

▶ **Exponentialfunktionen:** $y = f(x) = a^x$ $a > 0,\ x \in \mathbb{R}$.

- **Eulersche Zahl:** $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718...$.
- Wachstums- oder Zerfallsprozesse:

$N(t) = N_0 \cdot a^t$ oder $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$

wobei:

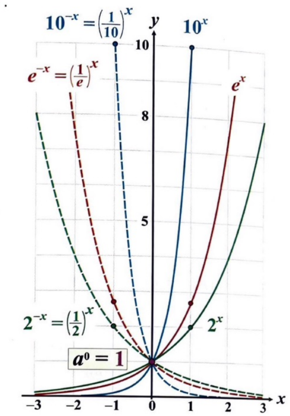
t : Zeit.

N_0 : Startwert (Population bei $t = 0$).

$N(t)$: Population zur Zeit t.

$a = e^k$: Wachstumsfaktor: $a = 1 + \frac{p}{100}$

mit $\begin{cases} p > 0 & \text{Wachstum} \\ p < 0 & \text{Zerfall} \end{cases}$ in % pro Zeiteinheit.



⇒ Potenzsätze, Logarithmensätze siehe S. 5.

⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

⇒ Grenzwerte siehe S. 25.

▶ **Logarithmusfunktionen:** $\bar{f}(x) = \log_a(x)$ $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$.

$\bar{f}(x) = \log_a(x)$ ist Umkehrfunktion zu $f(x) = a^x$:

- Zehnerlogarithmus:

$\bar{f}(x) = \log_{10}(x) = \log(x)$

$\log(10^x) = x,\quad 10^{\log(x)} = x \quad (x > 0)$

- Natürlicher Logarithmus:

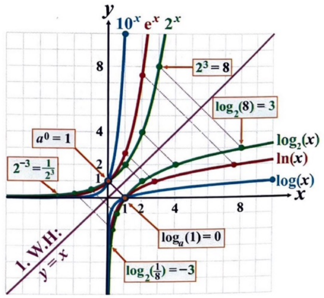
$\bar{f}(x) = \log_e(x) = \ln(x)$

$\ln(e^x) = x,\quad e^{\ln(x)} = x \quad (x > 0)$

- Binärer Logarithmus:

$\bar{f}(x) = \log_2(x) = \text{lb}(x)$

$\log_2(2^x) = x,\quad 2^{\log_2(x)} = x \quad (x > 0)$



2.7 Logarithmen (siehe auch S. 18)

Definition	$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$	$a, x > 0,\ a \neq 1$
Multiplikation, Division	$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
Potenzen	$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$ $x > 0$	$a^x = b \Rightarrow x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$
Basiswechsel	$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ $a > 0;\ a \neq 1$; $b > 0;\ b \neq 1$	speziell: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

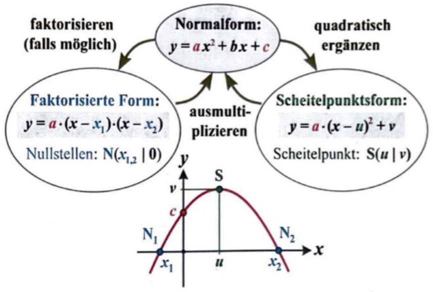
10.2 Bedingungen spezieller Punkte differenzierbarer Funktionen:

		f	f'	f''	f'''
Nullstelle	$N(x_N \mid 0)$	$f(x_N) = 0$	-	-	-
Hochpunkt	$H(x_H \mid f(x_H))$		$f'(x_H) \overset{\star}{=} 0$	$f''(x_H) \overset{\blacklozenge}{<} 0$	-
Tiefpunkt	$T(x_T \mid f(x_T))$		$f'(x_T) \overset{\star}{=} 0$	$f''(x_T) \overset{\blacklozenge}{>} 0$	-
Sattelpunkt, Terrassenp.	$S(x_S \mid f(x_S))$		$f'(x_S) \overset{\star}{=} 0$	$f''(x_S) \overset{\star}{=} 0$	$f'''(x_S) \overset{\blacklozenge}{\neq} 0$
Wendepunkt	$W(x_W \mid f(x_W))$		-	$f''(x_W) \overset{\star}{=} 0$	$f'''(x_W) \overset{\blacklozenge}{\neq} 0$

★ = notwendige Bedingung, (★ + ♦) = hinreichende Bedingung.

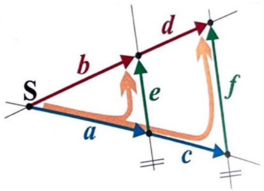
5.5.2 Parabeln ($n=2$): $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$

- a: Öffnung:
  $a<0 \Rightarrow$ nach unten ∩,
  $a>0 \Rightarrow$ nach oben ∪,
  $a=1 \Rightarrow$ Normalparabel.
- b: linearer Term.
- c: y-Achsenabschnitt.
- Scheitelpunkt $S(u \mid v)$:
  $S(-\frac{b}{2a} \mid \frac{-b^2+4ac}{4a})$
- Mitternachtsformel:
  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$



- **Ähnlichkeit, Strahlensätze:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie **gleiche Winkel** und / oder **gleiche Seitenverhältnisse** haben.

  1. Strahlensatz: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$
  2. Strahlensatz: $\frac{a}{e} = \frac{a+c}{f}$

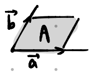


Skalarprodukt / Kreuzprodukt:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta$ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$: $\vec{c}\perp\vec{a}$ & $\vec{c}\perp\vec{b}$

Anwendungen:

↳ 

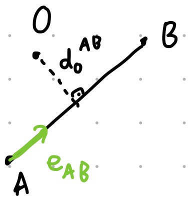
$|\vec{a}\times\vec{b}|$ = Fläche!

↳ |Spatprodukt| = Volumen des Parallelopipeds:

↳ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

Abstand einer Geraden AB zum Punkt O:

$$\boxed{d_O^{AB} = |r_{OA}\times e_{AB}| \equiv |r_{OB}\times e_{AB}|}$$

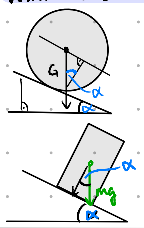


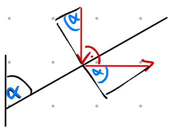
oder:

$P=(P_x, P_y, P_z)$ $g: \vec{Q}(s) = \vec{A} + s\vec{v}$

Abstand: $\boxed{\frac{|\vec{v}\times\vec{AP}|}{|\vec{v}|}}$

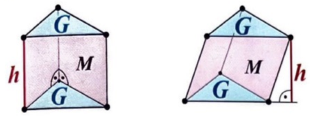
Winkelbeziehungen:



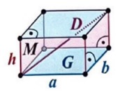
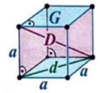
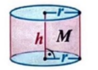


4.2 Prismen und Zylinder (Kongruente, parallele Grund- und Deckfläche)

Gerades Prisma   Schiefes Prisma

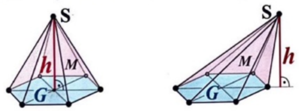


- G: Grundfläche; M: Mantelfläche.
- h: Höhe.
- Volumen: $\boxed{V = G\cdot h}$
- Oberfläche: $\boxed{A = 2\cdot G + M}$

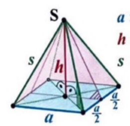
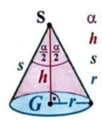
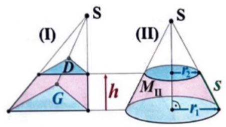
Quader	Würfel	Zylinder
		
$V = a\cdot b\cdot h$	$V = a^3$	$V = \pi r^2\cdot h$
$A = 2(a\cdot b + a\cdot h + b\cdot h)$	$A = 6\cdot a^2$	$A = 2\cdot\pi r^2 + 2\pi r\cdot h$
$D = \sqrt{a^2+b^2+h^2}$	$D = a\cdot\sqrt{3}$, $d = a\cdot\sqrt{2}$	$M = 2\pi r\cdot h$

4.3 Spitze Körper

Gerade Pyramide   Schiefe Pyramide



- G: Grundfläche; M: Mantelfläche.
- h: Höhe.
- Volumen: $\boxed{V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h}$
- Oberfläche: $\boxed{A = G + M}$

Gerade, quadratische Pyramide	Gerader Kreiskegel	Pyramidenstumpf (I), Kegelstumpf (II)
 a: Grundkante, h: Höhe, s: Seitenkante	 α: Öffnungswinkel, h: Höhe, s: Mantellinie, r: Radius	
$V = \frac{1}{3}a^2\cdot h$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$	$V_I = \frac{h}{3}(G + \sqrt{GD} + D)$
$A = a^2 + M$	$A = \pi r^2 + \pi rs$, $M = \pi rs$	$V_{II} = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$
$s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$	$s = \sqrt{h^2+r^2}$	$M_{II} = \pi\cdot s\cdot(r_1+r_2)$

Innenwinkel Polygon: (#Ecken − 2) · 180°

RAD → DEG

$\alpha\,\text{RAD} = \frac{\alpha}{\pi}\cdot 180°$

DEG → RAD

$\alpha° = \frac{\alpha}{180°}\cdot\pi\ \text{RAD}$

Kreis: $u = 2\pi r$ $A = \pi r^2$

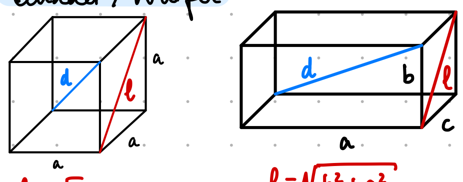
Kugel: $A = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Zylinder: $M = 2\pi rh$, $S = 2\pi r(r+h)$

$V = \pi r^2 h$

Geometrien:

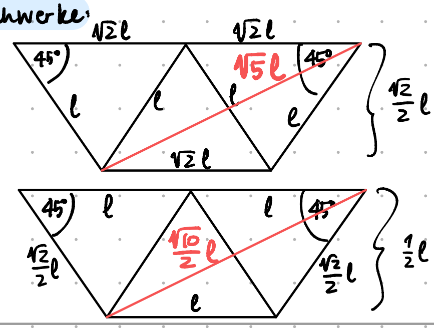
Quader / Würfel:



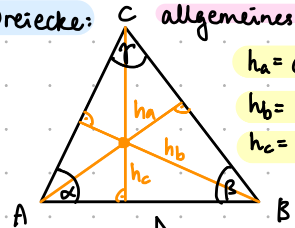
$\ell = \sqrt{2}\,a$ $\ell = \sqrt{b^2+c^2}$

$d = \sqrt{3}\,a$ $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Fachwerke:



Dreiecke: allgemeines Dreieck:

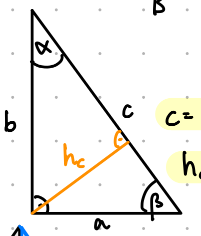


$h_a = c\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\gamma$

$h_b = a\cdot\sin\gamma = c\cdot\sin\alpha$

$h_c = b\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\beta$

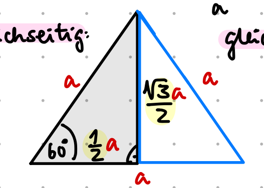
Rechtwinklig:



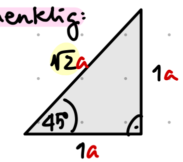
$c = \sqrt{a^2+b^2}$

$h_c = \frac{a\cdot b}{c}$

gleichseitig:



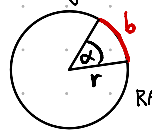
gleichschenklig:



Kreis:

Kreisgleichung: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$

Kreisbogen:



DEG: $b = \frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi r$ ges. Fläche = πr^2, ges. Umlauf = $2\pi r$

RAD: $b = \alpha\cdot r \rightsquigarrow \alpha = \frac{b}{r}$