Lineare Algebra:
Definitionen und Hilfestellungen

Eine kleine Sammlung an wichtigen Definitionen sowie "Kochrezepte" für bestimmte Aufgaben.

Autor: Felix Kunze
Überarbeitet und ergänzt von Matteo Dietz
Dozent: Dr. Vasile Gradinaru, ETH Zürich

401-0151-00L
Lineare Algebra für D-ITET & RW

June 2, 2024

1 Lineare Gleichungssysteme

1.1: Lineares Gleichungssystem

Ein Lineares Gleichungssystem hat folgende Form:

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}$$

Dabei ist $\mathbf{A}$ Die Koeffizientenmatrix, x Der Vektor der Unbekannten und b das gewünschte Ergebnis der Multiplikation $\mathbf{A}x$.
Ein Homogenes Gleichungssystem hat die Form:

$$\mathbf{A}x = 0$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ b_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{b}$$

Solch ein LGS lässt sich mit dem Gaussverfahren lösen.

Gaussverfahren

1. LGS zu einer oberen Dreiecksmatrix machen
2. Rückwertseinsetzen um lösungen zu finden.
3. Fallunterscheidung:
   - Eindeutige Lösung: $r = n$
   - Unendliche Lösungen: $r < n$
   - Keine Lösung: $\exists b$, sodass KB nicht erfüllt.

1.2: Rang & Kompatibilitätsbedingungen

Der Rang einer Matrix ist die Anzahl an Pivotelementen. Der Rang einer Matrix ist maximal so gross, wie die kleinste der Seitenlängen der Matrix. ($r \leq \min\{m, n\}$). Eine Matrix der Breite m mit k Nullzeilen hat den Rang $r = m - k$ und damit k freie Variablen.
Eine Kompatibilitätsbedingung (KB) ist eine Zeile der Form:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_i \end{array}\right]$$

Dies bedeutet, dass das das LGS nur dann lösbar ist wenn $b_i = 0$. Ein LGS kann mehrere solcher Bedingungen haben. Diese KBs gibt es genau dann, wenn $r < m$. Keine KB gibt es in jedem anderen fall, also $r = m \leq n$.

1.3: Reguläre (Invertierbare) Quadratische $(n \times n)$ Matrizen

Eine Matrix A ist dann und nur dann, Regulär wenn sie vollen Rang hat. Damit gibt es für jedes b genau eine Lösung. Auch hat $Ax = 0$ nur die triviale Lösung. Eine Reguläre Matrix ist Invertierbar.

1.4: Singuläre Quadratische $(n \times n)$ Matrizen

Eine Matrix A ist Singulär wenn sie nicht vollen Rang hat. Damit gibt es für gewisse b keine Lösung. Damit gibt es auch für **keine** b eine eindeutige Lösung. Auch hat $Ax = 0$ nicht-triviale Lösungen.

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \iff \det(A) = 0 \iff \mathrm{Rang}(A) < n \iff \exists x \in \mathbb{R}^n \neq 0 : Ax = 0$$

1.5: Die Transponierte und hermite Transponierte

Die Transponierte ist eine Spiegelung an der Diagonalen:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Im Allgemeinen gilt, dass um die Transponierte einer Matrix A zu nehmen jedes Element a von der Stelle ij an die Stelle ji bewegt wird. Bei der hermit Transponierten wird zusätzlich noch das komplex Konjugierte der matrix genommen. Eine Matrix ist Symmetrisch wenn $A = A^T$.
Sie ist antisymmertrisch wenn $A^T = -A$.
Sie ist hermite-Symmetrisch, wenn $A = A^H$.

1.6: Rechenregeln für Matrizen

$$
\begin{aligned}
&A \cdot B \neq B \cdot A \\
&A + B = B + A \\
&(A+B)+C = A+(B+C) \\
&(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \\
&(A+B) \cdot C = A \cdot C + A \cdot B \\
&(A+B)^T = A^T + B^T \\
&(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \\
&(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T \\
&A + 0 = A \\
&A \cdot I = A \\
&(A^T)^T = A \\
&\text{Rang}(A \cdot B) = \min\{\text{ Rang }(A), \text{ Rang }(B)\}
\end{aligned}
$$

Das multiplizieren von Matrizen ist nur unter folgenden Bedingungen möglich:

$$\dim A = k \times n; \quad \dim B = n \times p \quad \Rightarrow \dim(A \cdot B) = k \times p$$

1.7: Inverse einer Matrix A

Eine Matrix ist invertierbar bzw. regulär wenn es eine Matrix A^{-1} gibt mit:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Diese inverse ist Eindeutig. Eine Matrix ist auch invertierbar, wenn sie vollen Rang hat oder $\det A \neq 0$. Da eine reguläre Matrix invertierbar ist, gelten auch alle eigenschaften einer Regulären Matrix und alle Voraussetzungen derselben sind erfüllt. Diese Inverse hat einige Eigenschaften:

$$
\begin{aligned}
&AA^{-1} = A^{-1}A = I \\
&(A^{-1})^{-1} = A \\
&(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \\
&(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T
\end{aligned}
$$

Berechnen der Inverse Wir beginnen mit dem Aufbau:

$$(A)(I_n)$$

Mittels beidseitigem Anwenden derselben Rechenoperationen machen wir die Matrix A zur Einheitsmatrix. Dabei Entsteht das System:

$$(I_n)(A^{-1})$$

Berechnen der PLR-Zerlegung einer Matrix A

1. Aufbau von
$$(I_n)(I_n)(A)$$

2. Gaussverfahren anwenden auf A. Werden Zeilen vertauscht, so trägt man dies in die Linke I_n ein. Die Koeffizienten des Gaussverfahrens werden dabei in die mittlere Matrix eingetragen. Die Koeffizienten mit denen die Pivotzeilen multipliziert werden müssen, werden immer bezüglich der Operatoin Subtraktion gewählt. Dabei entstehen drei Matrizen:
$$(P)(L)(R)$$
L ist eine untere Dreiecksmatrix mit den Diagonalelementen 1. R ist eine obere Dreiecksmatrix. P stellt dann die Permutationen auf das System dar.
$$Ax = b \Rightarrow LRx = Pb$$

3. Man löst $Lc = Pb$ und findet c

4. Man löst $Rx = c$ und findet die Lösungsmenge x.

1.8: LDU-Zerlegung

Sei:
$$A = LU = LD\tilde{U}$$

Dann ist L eine untere Dreiecksmatrix mit nur einsen auf der Diagonale, D ist eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen von U und $\tilde{U}$ ist die U matrix, wobei hier jeweils die i-te Zeile durch das Respektive Diagonalelement geteilt wird.
Falls A Symmetrisch ist, so ist die Zerlegung wie folgt: $A = LDL^T$.

1.9: Cholesky Zerlegung

Die Cholesky Zerlegung gilt bei symmetrischen Matrizen bei denen alle Pivotelemente positiv sind. Es gilt also:

$$A = LU = LD\tilde{R} = LDL^T = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T$$

Da D Die diagonalmatrix ist, gilt $D = D^T$. Damit:

$$A = L\sqrt{D}\sqrt{D}^T L^T = L\sqrt{D}(L\sqrt{D})^T = R^T R$$

1.10: Skalarprodukt

Sei V ein reeler Vektorraum. Eine Abbildung der Form:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{R}, (a,b) \mapsto \langle a,b \rangle$$

heisst Skalarprodukt wenn folgende Eigenschaften Erfuellt sind:
1: Symmetrisch

$$\begin{aligned} \mathbb{R}: &\quad \langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle \\ \mathbb{C}: &\quad \langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle} \end{aligned}$$

2: Positiv-definit

$$\langle x,x \rangle \geq 0, \langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

3: Linear im zweiten Argument

$$\langle x, \lambda(y+z) \rangle = \lambda \langle x,y \rangle + \lambda \langle x,z \rangle$$

oder

$$\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x,z \rangle + \lambda \langle y,z \rangle$$

oder $\forall x,y,z \in V, a,b \in \mathbb{R}$:

$$\langle x, ay + bz \rangle = a \langle x,y \rangle + b \langle x,z \rangle$$

1.11: Norm

Sei V ein Vektorraum. Eine Norm auf V ist eine Abbildung der Form:

$$\| \cdot \| : V \mapsto [,\infty[$$

Damit es eine Norm ist muss diese Abbildung folgende Kriterien erfüllen:

$$\forall v \in V : \|v\| \geq 0 \text{ und } \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$
$$\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \|v\|$$
$$\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

Eine Norm lässt sich auch über das Skalarprodukt definieren. Dies ist die induzierte Norm:

$$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

Die wohl bekannteste Norm ist die euklidische Norm:

$$\|v\|_2 = \sqrt{{v_1}^2 + \cdots + {v_2}^2}$$

Ein paar beispiele anderer Normen wären die Maximusnorm:

$$\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|v_i|\},$$

oder die p-Norm mit:

$$\|v\|_p = \sqrt[p]{{v_1}^p + \cdots + {v_2}^p}$$

1.12: Orthogonale Matrizen

Eine quadratische Matrix ist orthogonal, wenn:

$$A^T \cdot A = I \iff A^{-1} = A^T$$

Bei einer solchen orthogonalen Matrix sind alle Spalten und Zeilenvektoren normiert. Ausserdem liegen diese senkrecht aufeinander. Das bedeutet, dass das Skalarprodukt 0 ist. Wir erinnern uns, dass das Skalarprodukt in Abhängigkeit des Vektorraumes ist. Ausserdem gilt:

$$A^{-1} = A^T$$

Bei zwei orthogonalen Matrizen ist ihr Produkt auch Orthogonal. Orthogonale Matrizen haben die Eigenschaft, dass sie weder Längen noch Winkel verändern.

1.13: Unitäre Matrizen

Eine Unitäre Matrix ist eine Matrix bei welcher gilt:

$$A^H A = I \iff A^H = A^{-1}.$$

Wir errrinern uns, dass für Matrizen im $\mathbb{R}^{n \times m}$ gilt: $A^T = A^H$.

1.14: Givens Rotation

Die Givens Rotation ist eine orthogonale Drehmatrix welche um den Winkel φ im Uhrzeigersinn, also mathematisch negative Richtung, dreht. Eine Drehung in der x_p-x_q-Ebene sieht aus wie folgt:

$$G(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & \overbrace{}^{\text{p-te Spalte}} & & \overbrace{}^{\text{q-te Spalte}} & & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos\varphi & \cdots & \sin\varphi & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -\sin\varphi & \cdots & \cos\varphi & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow \text{p-te Zeile} \\ \\ \longleftarrow \text{q-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Bei einer Drehung in mathematisch positiver Richtung, also gegen den Uhrzeigersinn, sind die Vorzeichen von $\sin\varphi$ vertauscht:

$$G(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & \overbrace{}^{\text{p-te Spalte}} & & \overbrace{}^{\text{q-te Spalte}} & & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos\varphi & \cdots & -\sin\varphi & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sin\varphi & \cdots & \cos\varphi & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow \text{p-te Zeile} \\ \\ \longleftarrow \text{q-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

1.15: Householder Spiegelungen

ine Householder Matrix ist eine Matrix welche einen Vektor x an einer

Ebene mit Normalenvektor v spiegelt. Solch eine Matrix errechnet sich mit:

$$H = I - 2 \cdot \frac{v \cdot v^T}{v^T v}$$

1.16: QR Zerlegung

Wir zerlegen die Matrix A in eine Orthogonale Matrix Q und eine obere Dreiecksmatrix R. Dabei ist:

$$A^{m\times n} = Q^{m\times m} \cdot R^{m\times n}$$

Wollen wir ein LGS mit der QR-Zerlegung lösen so gilt:

$$Ax = b \iff QRx = b \iff Rx = Q^T b$$

QR mit Givens Wir beginnen mit der Matrix A. Wir wollen nun einen bestimmten Eintrag a_{ij} zu null werden lassen. Aus der Givens Rotation folgt:

$$\cos\varphi = \frac{a_{jj}}{r} \qquad \sin\varphi = \frac{a_{ij}}{r}$$

Dabei ist r nach Pythagoras: $r = \sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}$ Man bildet nun für jedes Element welches zu null werden soll solch eine Matrix.

$$G = G_n \cdot G_{n-1} \cdots G_1 \Rightarrow G \cdot A = R$$

Dann gilt: $Q = G^{-1} = G^T = {G_1}^T \cdot \cdots \cdot {G_n}^T$

QR mit Householder Die QR Zerlegung mit der Householder Matrix behandelt ganze Spaltenvektoren auf einmal. Hier am Beispiel einer 3×3 Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = H_1 \cdot A = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix}$$

Diese H_1 Matrix gilt es nun zu finden. Indem wir nur die Erste Spalte betrachten wird das System einfacher:

$$x_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad x_1' = \begin{pmatrix} a_1' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um H_1 zu finden müssen wir den Normalenvektor finden. Dieser ist:

$$v_1 = x_1 - \|x_1\| e_1$$

Damit finden wir H_1 wie folgt:

$$H_1 = I - 2 \cdot \frac{v_1 \cdot v_1^T}{v_1^T v_1}$$

Nun müssen wir die anderen Spalten weiter bearbeiten. Das Ziel ist nun eine Matrix H_2 zu finden mit:

$$H_2 A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}'' & a_{13}'' \\ 0 & a_{22}'' & a_{23}'' \\ 0 & 0 & a_{33}'' \end{bmatrix}$$

Da H_2 die erste Spalte nicht verändern darf, müssen wir nur die inneren Elemente betrachten. Es gilt also:

$$\begin{aligned} x_2 &= \begin{pmatrix} a_{22}' \\ a_{32}' \end{pmatrix} \\ v_2 &= x_2 - \|x_2\| e_1 \\ H_2' &= I - 2 \cdot \frac{v_2 \cdot v_2^T}{v_2^T v_2} \\ H_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_2' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Genauso wird für die anderen Spalten verfahren. Am ende muss ähnlich wie bei dem Givens Verfahren vorgegangen werden:

$$R = H_n H_{n-1} \cdots H_1 \Rightarrow Q = H_1^T \cdot H_2^T \cdots H_n^T$$

2 Vektorräume

2.1: Vektorraum

Ein Vektorraum ist eine Menge von Objekten für die Addition und die Skalare Multiplikation definiert ist:

$$a, b \in V : a + b \in V$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, a \in V : \alpha \cdot a \in V$$

Dabei hat ein Vektorraum folgende Axiome:

1. Kommutativitätgesetz: $a + b = b + a$ für alle $a, b \in V$.
2. Assoziativitätgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in V$.
3. Es gibt $0 \in V$, sodass $a + 0 = a$ für alle $a \in V$ (dieses $0 \in V$ heisst Nullvektor).
4. Für jedes $a \in V$ gibt es $-a \in V$, so dass $a + (-a) = 0$.
5. Kompatibilität mit der Multiplikation mit Skalare:
   :
   $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in V$.
6. Die Addition der Skalaren ist distributiv gegen der Multiplikation mit Elementen aus V: $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta b$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in V$.
7. Neutralelement für die Multiplikation mit Skalare: $1 \cdot a = a$ für alle $a \in V$.

2.2: Unterraum

Ein Unterraum ist eine nichtleere Teilmenge eines Vektorraums. Ein Unterraum U muss zwei Kriterien erfüllen:

$$\forall a, b \in U : \quad a + b \in U$$

$$\forall a \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \quad \alpha \cdot a \in U$$

Aus letztem Kriterium lässt sich folgern, dass jeder Unterraum zwingend das Nullelement enthalten muss, da:

$$\alpha = 0 : \quad 0 \cdot a = 0 \quad \Longrightarrow 0 \in U$$

Ein Unterraum ist auch ein Vektorraum.

2.3: Erzeugendensystem

Sei V ein linearer Raum. Die Menge $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in V$ heisst Erzeugendensystem, falls jedes $b \in V$ sich als eine Linearekombination der Vektoren der Menge schreiben lässt. Falls alle Vektoren dieser Menge linear unabhängig sind, so nennt man dieses Erzeugendensystem eine Basis. Die Dimension eines linearen Raumes entspricht der Anzahl an Elementen in seiner Basis. In einem Raum der Dimension n sind also

n Elemente linear unabhängig und genau dann auch ein Erzeugendensystem des Raumes. Demnach sind auch mehr als n Elemente linear abhängig.

2.4: Kern und Bild einer Matrix

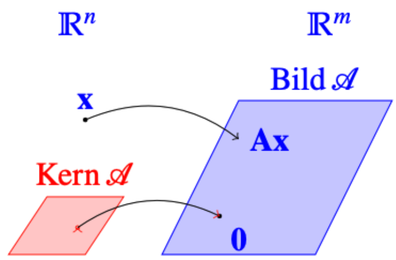
Gegeben sei ein Gleichungssystem

$$Ax = b$$

Das Bild einer Matrix ist die Menge an Vektoren b welche als Lösung möglich ist. Rein praktisch gesehen ist dies der Aufspann der Linear Unabhängigen Spaltenvektoren von A. Im Vergleich zur Analysis ist dies die "Wertemenge". Im Falle einer Linearen Abbildung wird die Wichtigkeit dieses Konzepts offensichtlich.

Der Kern einer Matrix ist die Menge aller Vektoren die von A auf 0 abgebildet werden. In anderen Worten, ist der Kern die Lösungsmenge des Homogenen LGS $Ax = 0$.

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad Ax = 0\}$$



2.5: Fundamentalsatz der Linearen Algebra

Der Fundamentalsatz trifft Aussagen über das Verhältnis von Bild und Kern einer Matrix. Gegeben sei die $n \times k$ Matrix A von Rang r. Bezüglich der Dimensionen der Unterräume:

$$\dim(\text{Bild } A) = r, \quad \dim(\ker A) = k - r,$$
$$\dim(\text{Bild } A^T) = r, \quad \dim(\ker A^T) = n - r$$

Der Dimensionssatz:

$$\dim(\ker A) + \dim(\text{Bild} A^T) = k,$$
$$\dim(\ker A^T) + \dim(\text{Bild } A) = n$$

Die Unterräume stehen Orthogonal aufeinander:

$$\ker A \perp \text{Bild } A^T, \quad \text{Bild } A \perp \ker A^T$$

Zwei Unterraeume U und V eines Vektorraums sind Orthogonal, falls beliebige Vektoren $u \in U$ und $v \in V$ zueinander orthogonal sind.

2.6: Koordinatenabbildung

Innerhalb eines Linearen Raumes V mit einer bestimmten Basis ist ein Vektor dargestellt als eindeutige Linearkombination dieser Basisvektoren:

$$\mathcal{K}_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$$
$$x = x_1 v_1 + \cdots + \mapsto \mathcal{K}_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Durchführen eines Basiswechsels: Wir haben einen Vektor x in einer Basis $\mathcal{B}$ und wollen die Koordinaten dieses Vektors umwandeln in einen Vektor $\tilde{x}$ in der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$. Hierfür nutzen wir die Matrix T, welche von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$ umwandelt:

$$\text{Mat}(\tilde{\mathcal{B}})_{\mathcal{B}} = T$$
$$\text{Mat}(\mathcal{B})_{\tilde{\mathcal{B}}} = T^{-1}$$

Wir stellen nun zwei Methoden diese Matrix T zu errechnen vor:

Methode 1: Aus der Natur von Basen können wir folgendes Folgern:

$$\tilde{\mathcal{B}}\tilde{x} = \mathcal{B}x$$

Daraus folgern wir:

$$\tilde{x} = \tilde{\mathcal{B}}^{-1}\mathcal{B} \cdot x$$
$$T = \tilde{\mathcal{B}}^{-1}\mathcal{B}$$
$$\tilde{x} = Tx$$

Methode 2: Wir bauen die Beiden Basen nun ähnlich auf wie beim berechnen der Inverse:

$$\left[\tilde{\mathscr{B}}\middle|\mathscr{B}\right]$$

Mittels ders Gauss-Jordan verfahrens wird diese Matrix nun umgewandelt:

$$[I|T]$$

Indem die Identitätsmatrix auf der rechten Seite entwickelt wird, entsteht dabei T^{-1}:

$$\left[T^{-1}\middle|I\right]$$

3 Lineare Abbildungen

3.1: Lineare Abbildung

Eine lineare Abbildung oder lineare Funktion ist eine Funktion welche zwischen zwei Linearen Räumen X und Y abbildet:

$$\mathscr{F} : X \to Y$$

Diese Funktion muss zwei Kriterien erfuellen:

$$\mathscr{F}(x_1 + x_2) = \mathscr{F}x_1 + \mathscr{F}x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in X$$
$$\mathscr{F}\alpha x = \alpha\mathscr{F}x, \quad \forall x \in X \text{ und } \alpha \text{ ist ein Skalar}$$

Eine Lineare Abbildung $\mathscr{A}$ lässt sich auch als Matrix schreiben:

$$\mathscr{A} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \mathscr{A}x = Ax$$

Hierbei ist A eine $n \times k$ Matrix.

3.2: Kommutatives Diagramm

Dieses Diagramm erklärt wie Lineare Abbildungen funktionieren:

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{B} : X \arrow[r, "\mathscr{F}"] \arrow[d, shift right, "k_{\mathscr{B}}"'] & Y : \mathscr{C} \arrow[d, shift right, "k_{\mathscr{C}}"'] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathbf{A}"] \arrow[u, shift right, "k_{\mathscr{B}}^{-1}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[u, shift right, "k_{\mathscr{C}}^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

Bestimmen einer Abbildungsmatrix Wir gehen hier gemäss dem Kommutativen Diagramm vor. Das bedeutet, wir setzen die einzelnen Basisvektoren von x in die Abbildung ein und bilden dann aus der Menge der dabei entstehenden Vektoren die $m \times n$ Matrix A.

3.3: Isomorphismus und Automorphismus

Ein Isomorphismus ist eibijektive lineare Abbildung. Das bedeutet, dass die Abbildung $\mathscr{F}$ jedes Element von Y einem eindeutigen Element von X zugeordnet wird. Die Abbildung ist umkehrbar. Falls $X = Y$, so ist $\mathscr{F}$ ein Automorphismus.

Ein Isomorphismus $\mathscr{F} : X \mapsto Y$ hat immer eine Inverse $\mathscr{F}^{-1} : Y \mapsto F$. Diese Abbildung ist auch ein Isomorphismus. Dadurch entsteht das neue kommutative Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{B} : X \arrow[r, shift left, "\mathscr{F}"] \arrow[d, shift right, "k_{\mathscr{B}}"'] & Y : \mathscr{C} \arrow[l, shift left, "\mathscr{F}^{-1}"] \arrow[d, shift right, "k_{\mathscr{C}}"'] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, shift left, "\mathbf{A}"] \arrow[u, shift right, "k_{\mathscr{B}^{-1}}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[l, shift left, "\mathbf{A}^{-1}"] \arrow[u, shift right, "k_{\mathscr{C}^{-1}}"']
\end{tikzcd}
$$

3.4: Injektive Lineare Abbildung

Eine Lineare Abbildung ist genau dann und nur dann injektiv, wenn der Kern der Abbildung $\{0\}$ ist. Dies ist logisch, da dann die zugehörige Abbildungsmatrix vollen Rang hat sodass jede Lösung eindeutig ist.

3.5: Zusammengesetzte Lineare Abbildungen

Wie Funktionen auch können lineare Abbildungen verkettet werden. Die Zusammensetzung von linearen Abbildungen ist auch wieder linear:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathscr{F}"] \arrow[d, shift right, "\mathscr{k}_{\mathscr{B}}"'] & Y \arrow[r, "\mathscr{G}"] \arrow[d, shift right, "\mathscr{k}_{\mathscr{C}}"'] & Z \arrow[d, shift right, "\mathscr{k}_{\mathscr{D}}"'] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathbf{A}"] \arrow[u, shift right, "\mathscr{k}_{\mathscr{B}}^{-1}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\mathbf{B}"] \arrow[u, shift right, "\mathscr{k}_{\mathscr{C}}^{-1}"'] & \mathbb{R}^p \arrow[u, shift right, "\mathscr{k}_{\mathscr{D}}^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

Diese Verknüpfung kann berechnet werden. Es gilt dabei:

$$\mathscr{G}\mathscr{F}x = \mathscr{K}_{\mathscr{D}}^{-1} B A \mathscr{K}_{\mathscr{B}} x$$

3.6: Abbildungsmatrizen bei Koordinatentransformationen

Wir haben nun innerhalb des gleichen Raums zwei Basen. Unser Diagramm sieht also aus wie folgt:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathbf{B}"] \arrow[d, shift right, "\tilde{\mathscr{B}} : \mathscr{k}_{\tilde{\mathscr{B}}}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, shift right, "\mathscr{k}_{\tilde{\mathscr{C}}}"'] \\
X \arrow[r, "\mathscr{F}"] \arrow[u, shift right, "\mathscr{k}_{\tilde{\mathscr{B}}}^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "\mathscr{B} : \mathscr{k}_{\mathscr{B}}"'] & Y \arrow[u, shift right, "\mathscr{k}_{\tilde{\mathscr{C}}}^{-1} : \tilde{\mathscr{C}}"'] \arrow[d, shift right, "\mathscr{k}_{\mathscr{C}}"'] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathbf{A}"] \arrow[u, shift right, "\mathscr{k}_{\mathscr{B}}^{-1}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[u, shift right, "\mathscr{k}_{\mathscr{C}}^{-1} : \mathscr{C}"']
\end{tikzcd}
$$

Um B zu bestimmen führen wir einen Basiswechsel durch. Es gilt damit:

$$B = \overbrace{\mathscr{K}_{\tilde{\mathscr{B}}}^{-1} \mathscr{K}_{\mathscr{B}}}^{S} A \overbrace{\mathscr{K}_{\mathscr{C}}^{-1} \mathscr{K}_{\tilde{C}}}^{T} = SAT$$

$$B = SAT \Longleftrightarrow A = S^{-1} B T^{-1}$$

4 Norm und Skalarprodukt

4.1: Orthogonale Projektion

Die Orthogonale Prokektion von x auf y ist definiert als:

$$P_y x = \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} y$$

4.2: Winkel zwischen Vektoren

Der Winkel zwischen den Vektoren x und y lässt sich auch über das Skalarprodukt schreiben:

$$\widehat{x,y} = \arccos \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\| \|y\|}$$

4.3: Orthonormale Basen

Paarweise Orthogonale Vektoren sind linear Unabhängig. Damit bilden n paarweise Orthogonale Einheitsvektoren in einem linearen Raum eine Orthonormale Basis (ONB) dieses Raumes.

Um koordinaten in einer ONB zu bestimmen kann das Skalarprodukt verwendet werden. Sei $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ eine ONB und v ein Vektor:

$$v = \langle e_1, v\rangle e_1 + \langle e_2, v\rangle e_2 + \cdots + \langle e_n, v\rangle e_n$$

Dies entspricht einer linearen Kombination von Orthogonalen Projektionen auf die ONB:

$$v = P_{e_1} v + P_{e_2} v + \cdots + P_{e_n} v$$

Gram Schmidt Orthogonalisierung Der Gram Schmidt Algorithmus ist ein Algorithmus welcher eine Orthonormale Basis für den Aufspann einer Menge an Vektoren generiert.

Für jeden Vektor v_i werden nun folgende Schritte ausgeführt um einen Orthogonalen Vektor ω_i zu generieren. Es wird mit $i = 1$ begonnen. Der Algorithmus läuft damit wie folgt:

1. $$\omega_i' = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_i, \omega_k\rangle \omega_k$$

2.

$$\omega_i = \frac{\omega'_i}{\sqrt{\langle \omega'_i, \omega'_i \rangle}}$$

4.4: Satz von Parseval

Jedes Skalarprodukt eines Vektorraumes V lässt sich mithilfe der Koordinaten bezüglich der ONB von V mit dem Euklidischen Skalarprodukt berechnen. Eine mathematische Formulierung:

$$\langle x, y \rangle_V = x^H y = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

4.5: Projektoren

Ein Projektor ist ein Homomorphismus bei welchem das mehrfache Anwenden keine Veränderung hat. Einfach dargestellt:

$$\mathscr{P}^2 = \mathscr{P}$$

Ein Projektor $\mathscr{P}$ ist dann Orthogonal wenn zusätzlich für die Abbildungsmatrix P gilt:

$$P^H = P$$

Ein Projektor ist auch ein selbstadjungtierter Operator. Das bedeutet, dass folgende eigenschaft hält:

$$\langle x, Py \rangle = \langle Px, y \rangle \, \forall x, y \in V$$

Es gilt bei einem solchen Projektor auch:

$$x - Px \perp \text{Bild } P \forall x \in V$$

Nicht alle Projektoren sind jedoch Orthogonal. Falls nur die $P^2 = P$ Eigenschaft erfüllt ist, dann ist es ein schiefer Prohektor.

5 Ausgleichsrechnung

5.1: Ausgleichsrechnung

Die Ausgleichsrechnung ist eine Methode um ein überbestimmtes System möglichst gut anzunähern. Hierbei sind m Gleichungen mit n Unbekannten gegeben. All diese Gleichungen haben eine zu findende Lösung c_i. Das Ziel der Ausgleichsrechnung ist nun, diese Lösung möglichst genau zu bestimmen, beziehungsweise das Residuum zu minimieren:

$$Ax - c = r$$

A Stellt die Koeffizienten, x die Unbekannten c der Ergebnisvektor und r das Residuum dar. Dieses System ist mit der Normalengleichung lösbar. Dabei gilt:

$$A^T Ax = A^T c$$

Auch mittels der QR-Zerlegung kann ein solches System gelöst werden. Sei das Ausgleichsproblem $Ax - c = r$ gegeben, so kann die Matrix A in die Orthogonale Matrix Q und die Dreiecksmatrix R zerlegt werden. Die R Matrix hat Nullzeilen, diese werden ignoriert und es entsteht die Matrix R_0, bestehend aus all den Zeilen aus R die keine Nullzeilen sind:

$$A = Q \cdot R = Q \cdot \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wir berechnen nun $Q^T c$ und erhalten dadurch einen Vektor d. Diesen teilen wir auf in zwei Teilvektoren d_0 und d_1. Der Teilvektor d_0 hat genau die Höhe der MAtrix R_0:

$$Q^T c = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

Dadurch entsteht ein lösbares LGS:

$$R_0 x = d_0$$

6 Determinante

Die Determinante ist eine multlineare Abbildung welche eine Matrix auf einen einzelnen Wert abbildet. Geometrisch gesehen stellt sie für eine 2D Matrix die Fläche, für eine 3D Matrix das Volumen und für eine N-Dimensionale Matrix das N-Dimensionale Äquivalent dar. Es gibt drei eigenschaften der

Determinante welche diese Eindeutig Festlegen:

1. Die Determinante ist linear in jeder Zeile und Spalte.
2. Zeilen und Spalten der Matrix dürfen beliebig getauscht werden. Dies verändert allerdings das Vorzeichen der Determinante.
3. Die Determinante der Identitätsmatrix ist 1.

Um eine Determinante zu lösen verwendet man die Regel von Sarrus oder die Laplace Entwicklung. Falls A eine Dreiecksmatrix ist, so ist die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge. Da eine Matrix zu einer Dreicksmatrix mittels des Gaussverfahrens umgewandelt werden kann und eine solche umwandlung den Wert der Determinante nicht verändert, kann die Determinante auch darüber berechnet werden.
Wir beschreiben noch ein paar nützliche Eigenschaften der Determinante:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$
$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Die Determinante einer Singulären Matrix ist 0.

7 Eigenwerte

7.1: Eigenwerte

Ein Eigenwert λ einer quadratischen Matrix A ist ein Skalar für den gilt:

$$Ax = \lambda x$$

Um diesen zu ermitteln wird die charakteristische Gleichunge der Matrix gelöst. Diese schreibt man:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Eine $n \times n$ Matrix hat mindestens einen Eigenwert und kann bis zu n verschiedene Eigenwerte haben.

Bei der Betrachtung von Dreiecksmatrizen sind die Eigenwerte die Diagonalelemente. Damit ist die Determinante acuh das Produkt der Eigenwerte.

Falls eine Reele Matrix einen komplexen Eigenwert hat, so kommt dieser Paarweise vor. Das bedeutet, sowohl λ als auch $\overline{\lambda}$ ist ein Eigenwert.

7.2: Algebraische Multiplizität.

Die Algebraische Multiplizität eines Eigenwertes gibt an wie oft der gewisse Eigenwert in den Nullstellen der charakteristischen Gleichung vorkommt

7.3: Eigenvektor

Um einen Eigenvektor eines bestimmten Eigenwertes zu erhalten setzt man den Eigenwert in die charakteristische Gleichung ein. Die Menge aller Eigenvektoren eines bestimmten Eigenwertes spannt den Eigenraum auf.

7.4: Geometrische Multiplizität

Die geometrische Multiplizität ermittelt sich aus der Dimension des Eigenraums. Diese ist immer kleiner oder gleich die Algebraische Multiplizität:

$$1 \leq GM \leq AM$$

Diagonalisieren einer Matrix Eine Matrix ist nur dann Diagonalisierbar wenn für alle Eigenwerte gilt: $GM = AM$. Dann berechnen wir die Eignewerte von A. Diese schreiben wir in eine Diagonalmatrix wie folgt:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \end{bmatrix}$$

Wir berechnen nun die Eigenvektoren und schreiben sie Spaltenweise in eine Matrix S:

$$S = [s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_n]$$

Damit ergibt sich die Diagonalisierung:

$$A = SDS^{-1}$$

7.5: Ähnlichkeit von Matrizen

Zwei Matrizen A und B sind ähnlich, falls eine invertierbare MAtrix S existiert, sodass:

$$A = S^-1BS$$

Das bedeutet, dass im Fall einer Diagonalisierung, die Matrix A Ähnlich zu ihrere Diagonalmatrix D ist. Solche Ähnliche Matrizen haben die gleichen Eigenwerte und damit das gleiche charakteristische Polynom.

DGLs Lösen

Entkoppelte DGLs Folgendes DGL ist entkoppelt:

$$\dot{u}_1(t) = a_1 u_1(t)$$
$$\dot{u}_2(t) = a_2 u_2(t)$$

Es ist entkoppelt, weil die Gleichungen keinen zusammenhang zueinander haben. Wir fassen die Anfangsbedingungen in einem Vektor zusammen:

$$u(0) = \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}$$

Eine Lösung des DGLs ist die Exponentialfunktion:

$$u_1(t) = e^{a_1 t} u_1(0)$$
$$u_2(t) = e^{a_2 t} u_2(0)$$

Mittels unser Diagonalmatrix erhalten wir also:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$u(t) = e^{At} u(0)$$

Gekoppelte DGLs Wir stellen die Gleichungen wie gewohnt dar:

$$\dot{u} = Au$$

Bei dem gekoppelten DGL ist die Matrix A keine Diagonalmatrix mehr. Demnach muss sie Diagonalisiert werden:

$$\dot{u} = SDS^{-1}u \iff S^{-1}\dot{u} = DS^{-1}u$$

Wir führen jetzt eine Substitution durch. Es gilt: $v = S^{-1}u$ bzw. $u = Sv$.

$$\dot{v}(t) = Dv(t)$$

Wir handeln nun wie bei dem Entkoppelten System und führen die Anfangsbedingungen ein:

$$v(t) = e^{Dt}v(0) \iff S^{-1}u(t) = e^{Dt}S^{-1}u(0)$$

Es gilt damit Final:

$$u(t) = Se^{Dt}S^{-1}u(0)$$

Lösung von DGLs Als kurzform lässt sich die allgemeine Lösung für die DGL $\dot{y} = Ay$ mit $A = TDT^{-1}$ wie folgt schreiben:

$$y(t) = T^{(1)}e^{\lambda_1 t} \cdot c_1 + T^{(2)}e^{\lambda_2 t} \cdot c_2 + \cdots$$

Der Vektor $v(0)$ beschreibt den Anfangszustand des Systems mit:

$$v(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$v(0)$ ist aber nur eine art "hilfe" es gilt dabei: $v(0) = S^{-1}y(0)$. Falls nun die Spezielle Lösung des DGLs errechnet werden soll, muss der Vektor $v(0)$ berechnet werden. Dies wird mittels des gegebene Vektors $y(0)$ und der Matrix der Eigenvektoren getan. Also durch das Gaussen des Systems: $Sv(0) = y(0)$.

7.6: Normale Matrix

Eine quadratische Matrix ist *normal* wenn es gilt: $A^T A = AA^T$. Für komplexe Matrizen muss natürlich hermit transponiert werden.

7.7: Symmetrische Matrizen

Ist eine Matrix Symmetrisch, so hat sie zwingend reelle Eigenwerte und paarweise orthogonale Eigenvektoren.

Es entsteht der **Spektralsatz**: *Jede Symmetrische Matrix lässt sich durch orthogonale Transformationen diagonalisieren.*
Es gilt demnach:

$$A = UDU^{-1} = UDU^{T}$$

Falls alle Eigenwerte positiv sind, so ist die Matrix positiv-definit.

7.8: Euklidische Norm und Eigenwerte

Die 2-Norm einer quadratischen Matrix errechnet sich wie folgt:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda} \quad \lambda \text{ ist der grösste EW von } A^H A$$

Bei Symmetrischen Matrizen gilt:

$$\|A\|_2 = |\lambda| \quad \lambda \text{ ist der grösste EW von } A$$

Sei eine Matrix invertierbar, so gilt:

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda \quad \lambda \text{ ist der kleinste EW von } A^H A}$$

Ist die Matrix zusätzlich Symmetrisch:

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{|\lambda| \quad \lambda \text{ ist der kleinste EW von } A}$$

7.9: Konditionszahl

Die Konditionszahl einer invertierbaren Matrix A ist:

$$k(A) = \frac{\|A\|_2}{\|A^{-1}\|_2} = \sqrt{\frac{d_{max}}{d_{min}}}$$

Diese Konditionszahl bemisst die Rundungsfehler welcher entstehen. Umso kleiner der Wert, desto kleiner ist der Fehler.

7.10: Symmetrisch positiv-definite Matrizen

Eine Matrix ist Symmetrisch positiv-definit, wenn:

$$x^T Ax \geq 0 \forall x in \mathbb{R}^n$$

$$\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

Gilt nur die erste annahme, so ist die Matrix Symmetrisch Positiv-semidefinit. Eine Matrix ist s.p.d wenn alle Eigenvektoren grösser als 0 sind.

7.11: Ellipsen

Sei die Matrix A eine s.p.d. diagonalisierbare Matrix mit $A = S\Lambda S^T$. Die Quadratische Form der Matrix mit $f(x) = x^T Ax = 1$ beschreibt eine Ellipse. Im zweidimensionalen sieht das wie folgt aus:

$$1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

Daraus lässt sich die länge der beiden Halbachsen berechnen:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$$

8 Singulärwertzerlegung

8.1: Singulärwertzerlegung

Die SVD zerlegt eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in zwei Orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit den sogenannten Singulärwerten auf der Hauptdiagonale:

$$A = U\Sigma V^T$$

Es ist dabei $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p)$. Diese Werte sind absteigend sortiert.

Berechnen der SVD

- Berechne $A^T A$ und die zugehörigen Eigenwerte (λ_i) und Eigenvektoren (e_i)
- Bilde V aus den Normierten Eigenvektoren von $A^T A$. Nach dem Spektralsatz ist V Orthogonal.
- Erstelle Σ aus den Singlärwerten mit $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$
- Zwei möglichkeiten zum berechnen von U:
  1. Erstellen aus den Normierten Eigenvektoren von AA^T.
  2. Einzelnen wert errechnen mittels $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$, danach die anderen orthogonalen Vektoren durch unterschiedliche Methoden wie dem Kreuzprodukt oder dem Gram-Schmidt Algorithmus berechnen.

Darstellung als Summe von Rang 1 Matrizen: Eine Matrix A mit einer Singulärwertzerlegung können wir als eine Summe von mehreren Rang 1 Matrizen darstellen. dies sieht dann aus wie folgt:

$$A = \sigma_1 \cdot u_{1\,\text{(Spalte)}} \cdot {v_1}^T{}_{\text{(Zeile)}} + \sigma_2 \cdot u_{2\,\text{(Spalte)}} \cdot {V_2}^T{}_{\text{(Zeile)}}$$

8.2: Informationen in der SVD

Gegeben sei die Singulärwertzerlegung der Matrix A. Hieraus können einige Informationen gewonnen werden:

$$\begin{aligned} &\text{Rang } A = \text{Anzahl Singulärwerte} > 0 \\ &\dim A = \dim \Sigma \\ &\|A\|_2 = \sigma_1 \\ &\text{ONB von Bild } A = \text{span}\{u_1, \ldots, u_r\} \\ &\text{ONB von Kern } A = \text{span}\{v_{r+1}, \ldots, v_n\} \end{aligned}$$

8.3: Ausgleichsrechnung mit der SVD

Gegeben sei die SVD mit: $A = U\Sigma V^T$. r ist dabei der Rang der Matrix, bzw. die Menge an Singulärwerten grösser 0. Daraus ermittelt man nun drei Matrizen:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} U_r & U_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r^T \\ v_k^T \end{bmatrix}$$

Damit hat U_r die ersten r Spalten, Σ_r die ersten r Singulärwerte und V_r^T die ersten r Zeilen der Matrix. Wir lösen das Ausgleichsproblem durch das berechnen von:

$$x = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T b$$