Übungsstunde 7

Ziele:

- Wiederholung

Wärmeleitung - Notation

- $\dot{Q}$ Wärmestrom $[W]$
- $\dot{Q}'$ Wärmestrom pro Länge $[W/m]$
- $\dot{Q}''$ Wärmestrom pro Fläche $[W/m^2]$
- $\dot{Q}'''$ Wärmestrom pro Volumen $[W/m^3]$

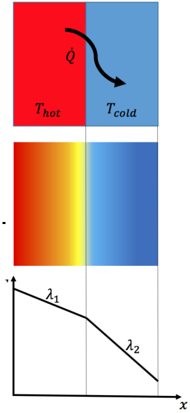
Wärmeleitung - Wärmeleitung (Conduction)

Fourier'sche Gesetz:

$$\dot{Q}'' = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

mit λ den Wärmeübertragungskoeffizient für Wärme-leitung

$$\lambda = \left[\frac{W}{m \cdot K}\right]$$



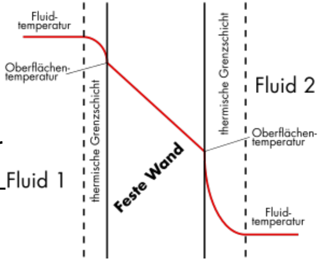
Wärmeleitung - Wärmeleitung (Konvektion)

Es existieren zwei Arten: Erzwungene und Natürliche Konvektion

$$\dot{Q}'' = \alpha \left(T_s - T_\infty \right)$$

mit λ den Wärmeübertragungskoeffizient für Konvektion und T_s die Oberflächentemperatur

$$\alpha = \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$$



Wärmeleitung - Wärmeleitugsgleichung

$$
\begin{aligned}
\text{Kartesische Koordinaten} \quad \rho c \frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\lambda \frac{dT}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\lambda \frac{dT}{dz}\right) + \dot{Q}'''_{Quellen} \\
\text{Zylinder Koordinaten} \quad \rho c \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\lambda r \frac{dT}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\lambda \frac{dT}{d\theta}\right) + \frac{d}{dz}\left(\lambda \frac{dT}{dz}\right) + \dot{Q}'''_{Quellen} \\
\text{Kugel Koordinaten} \quad \rho c \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\lambda r^2 \frac{dT}{dr}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\phi}\frac{d}{d\theta}\left(\lambda \frac{dT}{d\theta}\right) + \\
&\quad \frac{1}{r^2 \sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\lambda \sin\phi \frac{dT}{d\phi}\right) + \dot{Q}'''_{Quellen}
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

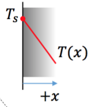
Vereinfachungen:

- ○ Stationär $\frac{d}{dt} = 0$
- ○ 1D in x $\frac{d}{dy} = \frac{d}{dz} = 0$
- ○ Unendlich Lange $\frac{d}{dz} = 0$
- ○ rot. Symmetrisch $\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{d\phi} = 0$

Wärmeleitung - Randbedingungen (Wärmeleitugsgleichung)

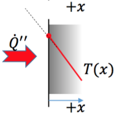
- Konstante Oberflächentemperatur

$$T(x=0) = T_s$$



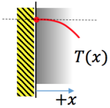
- Konstanter Wärmestrom

$$-\lambda \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0} = \dot{Q}''$$



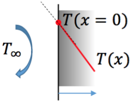
- Adiabate oder Isolierte Fläche

$$-\lambda \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0} = 0$$



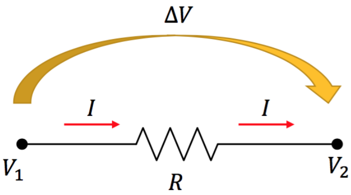
- Konvektion Oberfläche

$$-\lambda \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0} = \alpha(T_\infty - T(x=0))$$



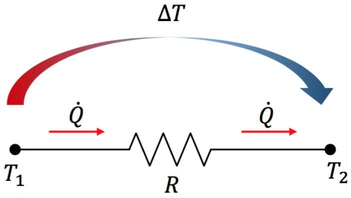
Analogie zu Elektrotechnik

ELEKTROTECHNIK



$U = R \cdot I$

THERMODYNAMIK



$\Delta T = R \cdot \dot{Q}$

Konduktion - Konvektion

Für ebene Wand:

$$R = \frac{L}{A\lambda} \quad \text{mit } L\text{: Dike der Wand}$$

Für zylindrische Wand:

$$R = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda L} \quad \text{mit } L\text{: Länge der Wand}$$

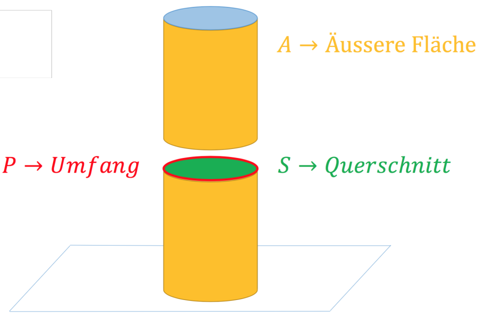
Konvektion:

$$R_{konv} = \frac{1}{\alpha \cdot A}$$

Vorteile/Nachteile

Die Rechnung mit den Wiederstände vereinfacht, gegenüber den Differenzial Beziehungen, die Rechnung für den Wärmestrom, ermöglicht es aber nicht mit Wärmequellen zu rechnen und Temperaturprofile zu bestimmen.

Rippen - Notation



Rippen - Allgemeine Rippengleichung

Mit

$$U = \rho \cdot c \cdot T \cdot dV \qquad \dot{E} = \dot{m} \cdot c \cdot T = \rho \cdot u \cdot S \cdot c \cdot T \quad \dot{Q}_{leit} = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right) \quad \dot{Q}_{konv} = \alpha \cdot dA \cdot (T - T_\infty)$$

finden wir

$$\rho \cdot c \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dx} T\right) = \lambda \frac{d}{dx}\left(S \frac{dT}{dx}\right) - \rho \cdot c \cdot \frac{d}{dx}(S \cdot u \cdot T) - \frac{dA}{dx} \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) + \dot{Q}'''_{Quellen} \frac{dV}{dx} - \dot{Q}''_{Strahlung} \frac{dA}{dx}$$

Rippen - Vereinfachte Rippengleichung

In den meisten Fällen kann man die Rippengleichung vereinfachen.

$$\cancel{\rho \cdot c \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dx} T\right)} = \lambda \frac{d}{dx}\left(S \frac{dT}{dx}\right) - \cancel{\rho \cdot c \cdot \frac{d}{dx}(S \cdot u \cdot T)} - \underbrace{\frac{dA}{dx}}_{P} \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) + \cancel{\dot{Q}'''_{Quellen} \frac{dV}{dx}} - \cancel{\dot{Q}''_{Strahlung} \frac{dA}{dx}}$$

- Querschnitt S ist Konstant
- Die Rippe bewegt sich nicht
- Stationär
- Keine Wärmequelle
- Keine Strahlung

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} - P \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{\alpha \cdot P}{\lambda \cdot S} \cdot (T - T_\infty) = 0$$

Wir definieren nun:

Rippenparameter: $m^2 = \frac{\alpha \cdot P}{\lambda \cdot S}$ **Übertemperatur:** $\theta = T - T_\infty$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \cdot \theta = 0$$

$$\theta(x) = C_1 \cdot e^{mx} + C_2 \cdot e^{-mx}$$

Rippen - Randbedingungen

1.

$$T(x)\big|_{x=0} = T_F \rightarrow \theta(x)\big|_{x=0} = T_F - T_\infty = \theta_F$$

$$\boldsymbol{\theta(0) = \theta_F = C_1 + C_2}$$

2.
   - Spezialfall: Adiabater Kopf
   - Spezialfall: Am Rippenkopf herrscht Konvektion
   - Spezialfall: Bekannte Temperatur am Rippenkopf
   - Spezialfall: Unendlich Lang

Rippen - Randbedingungen (Adiabater Kopf)

$$\left.\frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x=L}} = \mathbf{0}$$

mit

$$\frac{d\theta}{dx} = C_1 \cdot m \cdot e^{mL} - C_2 \cdot m \cdot e^{-mL} = 0 \quad \text{und} \quad \theta(0) = C_1 + C_2$$

folgt

$$C_1 = \theta_F \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \quad \text{und} \quad C_2 = \theta_F \cdot \left(1 - \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}\right)$$

und mit Hilfe von Hyperbolischen Funktionen

$$\theta(x) = \theta_F \frac{\cosh(m \cdot (L - x))}{\cosh(m \cdot L)}$$

$$\dot{Q}_F = -\lambda \cdot S \cdot \left.\left(\frac{dT}{dx}\right)\right|_{x=0} = \lambda \cdot S \cdot \theta_F \frac{m \cdot \sinh(m \cdot L)}{\cosh(m \cdot L)} = \lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot m \cdot \tanh(m \cdot L)$$

Rippen - Randbedingungen (Am Rippenkopf herrscht Konvektion)

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \theta(x = L)$$

mit

$$\frac{d\theta}{dx} = C_1 \cdot m \cdot e^{mL} - C_2 \cdot m \cdot e^{-mL} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (C_1 \cdot e^{mL} + C_2 \cdot e^{-mL}) \quad \text{und} \quad \theta(0) = C_1 + C_2$$

folgt

$$\theta(x) = \theta_F \frac{\cosh(m \cdot (L - x)) + \frac{\alpha}{m \cdot \lambda} \sinh(m \cdot (L - x))}{\cosh(mL) + \frac{\alpha}{m \cdot \lambda} \sinh(mL)}$$

$$\dot{Q}_F = \sqrt{\alpha \cdot P \cdot \lambda \cdot S} \cdot \theta_F \frac{\sinh(mL) + \frac{\alpha}{m\lambda} \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{\alpha}{m\lambda} \sinh(mL)}$$

Rippen - Randbedingungen (Bekannte Temperatur am Rippenkopf)

$$\boldsymbol{\theta(L) = T_K - T_\infty = \theta_K}$$

mit

$$\theta(L) = \theta_K \quad \text{und} \quad \theta(0) = C_1 + C_2$$

folgt

$$\theta(x) = \theta_F \frac{\frac{\theta_K}{\theta_F}\sinh(mx) + \sinh(m \cdot (L - x))}{\sinh(mL)}$$

$$\dot{Q}_F = \sqrt{\alpha \cdot P \cdot \lambda \cdot S} \cdot \theta_F \frac{\cosh(mL) - \frac{\theta_K}{\theta_F}}{\sinh(mL)}$$

Rippen - Randbedingungen (Unendlich Lang)

$$\boldsymbol{T(L \rightarrow \infty) = T_\infty \Rightarrow \theta(L \rightarrow \infty) = 0}$$

mit

$$\theta(L \rightarrow \infty) = C_1 e^{m(L \rightarrow \infty)} = 0 \quad \text{und} \quad \theta(0) = C_1 + C_2$$

folgt

$$\theta(x) = \theta_F \cdot e^{-mx}$$

$$\dot{Q}_F = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)\bigg|_{x=0} = \lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot m = \theta_F \sqrt{\lambda \cdot S \cdot \alpha \cdot P}$$

Rippen - Rippenwirkungsgrad

$$\eta_R = \frac{\text{Übertragene Wärmemenge}}{\text{Maximal übertragbare Wärmemenge}}$$

Übertragene Wärmemenge: Wärmemenge durch Rippenfuss (z.B. $\dot{Q}_F = \lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot m \cdot \tanh(m \cdot L)$)

Maximal übertragbare Wärmemenge: Wärmemenge durch Oberfläche wenn die Temperatur an der Oberfläche die Temperatur des Rippenfusses annimmt (z.B. $\dot{Q}_F = \alpha \cdot \underbrace{P \cdot L}_{A} \cdot \theta_F$)

Instationäre Wärmeleitungsgleichung - 0-D

$$Bi = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}$$

Falls $Bi \ll 1$ kann die Wärmeleitung innerhalb des Körpers vernachlässigt werden.
Aus dem ersten Hauptsatz folgt somit

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} \quad \rightarrow \quad mc\frac{dT}{dt} = -\alpha A(T - T_\infty) \quad \rightarrow \quad \frac{T(t) - T_\infty}{(T(t=0) - T_\infty} = exp\left(\frac{-\alpha A}{mc}t\right)$$

Instationäre Wärmeleitungsgleichung - 1D

Diffusionslänge: $x_D = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c} \cdot t_d}$

Die Stelle wo die Störung einen Wert von 48% von der gesamten an der Oberfläche Angebrachte Störung erreicht.
Die Diffusionslänge ist also die Stelle wo: $\Delta T = 0.48 \cdot \Delta T_{initial}$

Konvektion - Reynold Zahl

$$Re = \frac{u_\infty \cdot x}{\nu} = \frac{\rho \cdot u_\infty \cdot x}{\eta}$$

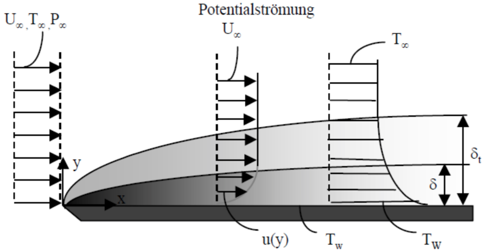
Die Reynold Zahl gibt eine Angebe zur Art der Strömung (Laminar, Turbulent).

Konvektion - Prandtl Zahl

$$Pr = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda}$$

Beschreibt das Verhältnis zwischen kinematischer Viskosität und Temperaturleitfähigkeit.
Gibt also ein Verhältnis zwischen Strömungsgrenzschicht und Temperaturgrenzschincht.

Normalerweise ist der Wert oder die Formel Gegeben.



Konvektion - Nusselt Zahl

$$Nu = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}$$

Für eine Ebene Wand gilt meistens:

- Laminar

$$Nu = 0.332 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \qquad \text{falls } (Pr > 0.6)$$

$$Nu = 0.565 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/2} \qquad \text{falls } (Pr < 0.6)$$

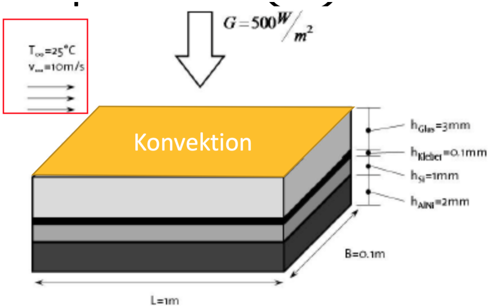
- Turbulent

$$Nu = 0.0296 \cdot Re_x^{4/5} \cdot Pr^{1/3}$$

Oft sind aber Spezifische Formeln gegeben.

Achtung: Falls Nu_x müssen wir über die länge x integrieren. Falls eine Formel für $\bar{Nu}$ hingegen gegeben ist, beschreibt diese bereits den durchschnitt.

Konvektion - Beispiel



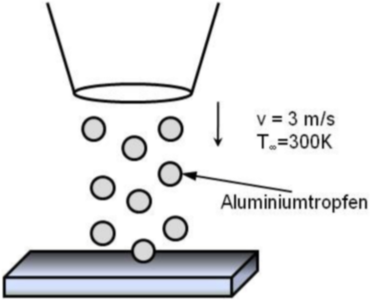
Gegeben:

$$T_\infty = 25°C$$
$$u_\infty = 10\frac{m}{s}$$
$$\lambda_{Luft} = 0.027\frac{W}{mK}$$
$$\nu_{Luft} = 1.669 \cdot 10^{-5}\frac{m^2}{s}$$
$$Pr = 0.71$$
$$Nu_x = 0.0148 \cdot Re_x^{\frac{4}{5}} \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}$$
$$L = 1m$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L}\int_0^L \alpha(x)dx = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{Nu_x \cdot \lambda_{luft}}{x}dx = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{0.0148 \cdot Re_x^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{luft}}{x}dx = ... = 18.66\frac{W}{m^2 K}$$

Konvektion - Beispiel

$$\overline{Nu}_D = 2 + \left(0.4\,\mathrm{Re}_D^{1/2} + 0.06\,\mathrm{Re}_D^{2/3}\right)\cdot \mathrm{Pr}^{0.4}\cdot\left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{1/4}$$



Gegeben:

$$D = 500\ \mu m$$
$$\lambda_{He} = 0.152\,\frac{W}{mK}$$
$$c_{He} = 5200\,\frac{J}{Kg\ K}$$
$$\mu_{He} = 199\cdot 10^{-7}\,\frac{Ns}{m^2}$$
$$\mu_s = 446\cdot 10^{-7}\,\frac{Ns}{m^2}$$
$$\nu_{He} = 122\cdot 10^{-6}\,\frac{m^2}{s}$$
$$T_\infty = 300\ K$$

$$Re = \frac{u_\infty D}{\nu} \qquad Pr = \frac{c_{He}\mu_{He}}{\lambda_{He}}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\overline{Nu_D}\lambda_{He}}{D}$$