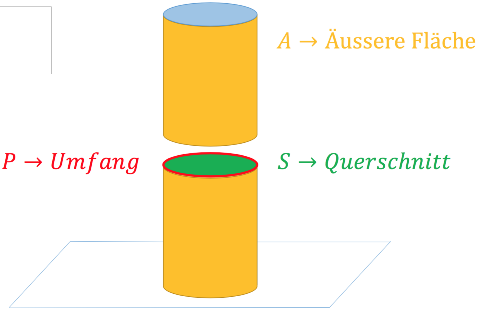
Übungsstunde 7

Ziele:

- Rippen

Rippen - Notation



Rippen - Allgemeine Rippengleichung

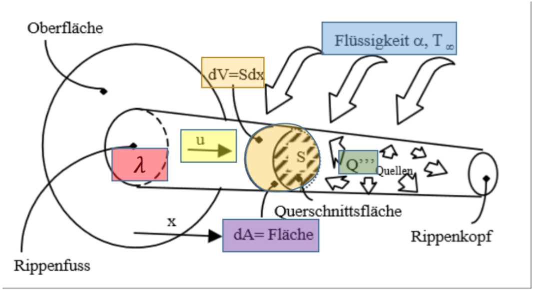
Draht hat eine Geschwindigkeit

Geschwindigkeit nicht konstant

Wärmequelle

Wärmeleitung

Konwektion



$$\frac{dU}{dt} = \underbrace{\dot{Q}_{leit} + \dot{E} + \dot{Q}'''_{Quelle}}_{\text{Kommt rein ins Kontrollvolumen}} \underbrace{- \left[\dot{Q}_{leit} + \frac{d\dot{Q}_{leit}}{dx}dx\right] - \left[\dot{E} + \frac{dE}{dx}dx\right] - \dot{Q}_{konv} - \dot{Q}''_{Strahlung} \cdot dA}_{\text{Fliesst raus aus dem Kontrollvolumen}}$$

Rippen - Allgemeine Rippengleichung

Mit

$$U = \rho \cdot c \cdot T \cdot dV \qquad \dot{E} = \dot{m} \cdot c \cdot T = \rho \cdot u \cdot S \cdot c \cdot T \quad \dot{Q}_{leit} = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right) \quad \dot{Q}_{konv} = \alpha \cdot dA \cdot (T - T_\infty)$$

finden wir

$$\rho \cdot c \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dx} T\right) = \lambda \frac{d}{dx}\left(S \frac{dT}{dx}\right) - \rho \cdot c \cdot \frac{d}{dx}(S \cdot u \cdot T) - \frac{dA}{dx} \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) + \dot{Q}'''_{Quellen} \frac{dV}{dx} - \dot{Q}''_{Strahlung} \frac{dA}{dx}$$

Rippen - Vereinfachte Rippengleichung

In den meisten Fällen kann man die Rippengleichung vereinfachen.

$$\cancel{\rho \cdot c \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{dV}{dx}T\right)} = \lambda \frac{d}{dx}\left(S\frac{dT}{dx}\right) - \cancel{\rho \cdot c \cdot \frac{d}{dx}(S \cdot u \cdot T)} - \underbrace{\frac{dA}{dx}}_{P} \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) + \cancel{\dot{Q}'''_{Quellen}\frac{dV}{dx}} - \cancel{\dot{Q}''_{Strahlung}\frac{dA}{dx}}$$

- Querschnitt S ist Konstant
- Die Rippe bewegt sich nicht
- Stationär
- Keine Wärmequelle
- Keine Strahlung

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{d^2T}{dx^2} - P \cdot \alpha \cdot (T - T_\infty) = 0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\alpha \cdot P}{\lambda \cdot S} \cdot (T - T_\infty) = 0$$

Wir definieren nun:

Rippenparameter: $m^2 = \frac{\alpha \cdot P}{\lambda \cdot S}$ **Übertemperatur:** $\theta = T - T_\infty$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2 \cdot \theta = 0$$

$$\theta(x) = C_1 \cdot e^{mx} + C_2 \cdot e^{-mx}$$

Rippen - Randbedingungen

1.

$$T(x)\big|_{x=0} = T_F \rightarrow \theta(x)\big|_{x=0} = T_F - T_\infty = \theta_F$$

$$\boldsymbol{\theta(0) = \theta_F = C_1 + C_2}$$

2. – Spezialfall: Adiabater Kopf

   – Spezialfall: Am Rippenkopf herrscht Konvektion

   – Spezialfall: Bekannte Temperatur am Rippenkopf

   – Spezialfall: Unendlich Lang

Rippen - Randbedingungen (Adiabater Kopf)

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$$

mit

$$\frac{d\theta}{dx} = C_1 \cdot m \cdot e^{mL} - C_2 \cdot m \cdot e^{-mL} = 0 \quad \text{und} \quad \theta(0) = C_1 + C_2$$

folgt

$$C_1 = \theta_F \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \quad \text{und} \quad C_2 = \theta_F \cdot \left(1 - \frac{e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}\right)$$

und mit Hilfe von Hyperbolischen Funktionen

$$\theta(x) = \theta_F \frac{\cosh(m \cdot (L - x))}{\cosh(m \cdot L)}$$

$$\dot{Q}_F = -\lambda \cdot S \cdot \left.\left(\frac{dT}{dx}\right)\right|_{x=0} = \lambda \cdot S \cdot \theta_F \frac{m \cdot \sinh(m \cdot L)}{\cosh(m \cdot L)} = \lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot m \cdot \tanh(m \cdot L)$$

Rippen - Randbedingungen (Am Rippenkopf herrscht Konvektion)

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \theta(x = L)$$

mit

$$\frac{d\theta}{dx} = C_1 \cdot m \cdot e^{mL} - C_2 \cdot m \cdot e^{-mL} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (C_1 \cdot e^{mL} + C_2 \cdot e^{-mL}) \quad \text{und} \quad \theta(0) = C_1 + C_2$$

folgt

$$\theta(x) = \theta_F \frac{\cosh(m \cdot (L - x)) + \frac{\alpha}{m \cdot \lambda} \sinh(m \cdot (L - x))}{\cosh(mL) + \frac{\alpha}{m \cdot \lambda} \sinh(mL)}$$

$$\dot{Q}_F = \sqrt{\alpha \cdot P \cdot \lambda \cdot S} \cdot \theta_F \frac{\sinh(mL) + \frac{\alpha}{m\lambda} \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{\alpha}{m\lambda} \sinh(mL)}$$

Rippen - Randbedingungen (Bekannte Temperatur am Rippenkopf)

$$\boldsymbol{\theta(L) = T_K - T_\infty = \theta_K}$$

mit

$$\theta(L) = \theta_K \quad \text{und} \quad \theta(0) = C_1 + C_2$$

folgt

$$\theta(x) = \theta_F \frac{\frac{\theta_K}{\theta_F}\sinh(mx) + \sinh(m \cdot (L - x))}{\sinh(mL)}$$

$$\dot{Q}_F = \sqrt{\alpha \cdot P \cdot \lambda \cdot S} \cdot \theta_F \frac{\cosh(mL) - \frac{\theta_K}{\theta_F}}{\sinh(mL)}$$

Rippen - Randbedingungen (Unendlich Lang)

$$\boldsymbol{T(L \to \infty) = T_\infty \Rightarrow \theta(L \to \infty) = 0}$$

mit

$$\theta(L \to \infty) = C_1 e^{m(L \to \infty)} = 0 \quad \text{und} \quad \theta(0) = C_1 + C_2$$

folgt

$$\theta(x) = \theta_F \cdot e^{-mx}$$

$$\dot{Q}_F = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)\bigg|_{x=0} = \lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot m = \theta_F \sqrt{\lambda \cdot S \cdot \alpha \cdot P}$$

Rippen - Rippenwirkungsgrad

$$\eta_R = \frac{\text{Übertragene Wärmemenge}}{\text{Maximal übertragbare Wärmemenge}}$$

Übertragene Wärmemenge: Wärmemenge durch Rippenfuss (z.B. $\dot{Q}_F = \lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot m \cdot \tanh(m \cdot L)$)

Maximal übertragbare Wärmemenge: Wärmemenge durch Oberfläche wenn die Temperatur an der Oberfläche die Temperatur des Rippenfusses annimmt (z.B. $\dot{Q}_F = \alpha \cdot \underbrace{P \cdot L}_{A} \cdot \theta_F$)