Basisprüfung Analysis I/II D-ITET

Name:	
Vorname:	
Leginummer:	

Resultat

Aufgabe	Punkte	Erstkorrektur	Zweitkorrektur
1	6		
2	13		
3	5		
4	13		
5	19		
6	7		
7	6		
8	9		
9	6		
10	6		
11	5		
Total	95		

Vollständigkeit	

Allgemeine Informationen

- *Erlaubte Hilfsmittel:* Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter beidseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt, Wörterbücher, keine sonstige Literatur, keine Taschenrechner oder Handies.
- Bitte schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen es **im Rucksack** (nicht in der Hosentasche).
- *Prüfungsdauer:* 240 Minuten.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. **Es wird nicht erwartet, dass Sie in der vorgegebenen Zeit alle Aufgaben lösen müssen.**
- Hinter jeder Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktezahl.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte. Alle Antworten sind zu begründen.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie auf **alle** abzugebenden Blätter Ihren Namen und füllen Sie den Kopf des Deckblatts aus.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.
- Geben Sie auch das Prüfungsblatt ab (da Sie die Multiple-Choice-Aufgaben direkt auf das Aufgabenblatt lösen können).
- Bitte verwenden Sie weder rote oder grüne Stifte noch Bleistifte. Unlesbare Antworten und nicht nachvollziehbare Herleitungen werden als falsch gewertet.
- Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.

1. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es ist jeweils nur eine Antwort richtig. Bei jeder richtigen Antwort gibt es 2 Punkte, bei jeder falschen -1 Punkt. Wenn Sie mehrere Kreuze pro Teilaufgabe setzen, gibt es -1 Punkt. Sie können auch nichts ankreuzen. Das Minimum der Punktezahl bei dieser Aufgabe ist 0 Punkte. Bei Korrekturen, machen Sie ersichtlich, welches Ihre neue Antwort ist. Es wird keine Begründung erwartet. Beantworten Sie die Multiple-Choice-Aufgaben direkt auf dem Aufgabenblatt und geben Sie es am Schluss ab.

   (a) Seien F, G und h stetig differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$. Es gilt

   - ☐ $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{F(x)}^{G(x)} h(y)dy = \int_{F(x)}^{G(x)} \frac{d}{dx}h(y)dy = 0.$
   - ☐ $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{F(x)}^{G(x)} h(y)dy = \int_{F'(x)}^{G'(x)} h(y)dy.$
   - ☐ $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{F(x)}^{G(x)} h(y)dy = h(G(x))G'(x) - h(F(x))F'(x).$
   - ☐ $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{F(x)}^{G(x)} h(y)dy = \int_{F(x)}^{G(x)} \frac{d}{dy}h(y)dy = h(G(x)) - h(F(x)).$ [*2 Punkte*]

   (b) Der Konvergenzradius r der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$ beträgt

   - ☐ $r = \frac{1}{2}$.
   - ☐ $r = \frac{2}{5}$.
   - ☐ $r = 0$.
   - ☐ $r = 1$. [*2 Punkte*]

   (c) Berechnen wir

   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

   für die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$, so erhalten wir

   - ☐ ∞.
   - ☐ e^x.
   - ☐ 0.
   - ☐ $\mathrm{e}^x - 1$. [*2 Punkte*]

2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan(3x)}{\tan(x)}$, *[3 Punkte]*

   (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\sin^2(x)}$, *[3 Punkte]*

   (c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x - 4}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}}$, *[2 Punkte]*

   (d) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{x}}$. *[5 Punkte]*

3. Berechnen Sie die allgemeine, reelle Lösung y der Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = e^{3x}.$$

[5 Punkte]

4. Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

   im Bereich $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 4\}$. *[13 Punkte]*

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

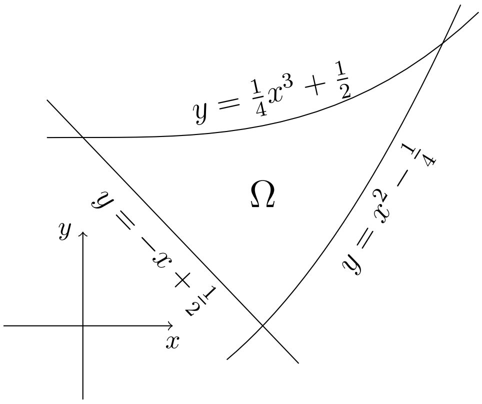
   (a) $\displaystyle\int e^x \sin(x) dx$, *[4 Punkte]*

   (b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}} dx$, *[2 Punkte]*

   (c) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 1} dx$, *[7 Punkte]*

   (d) $\displaystyle\int \frac{8x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 5}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2} dx$. *[6 Punkte]*

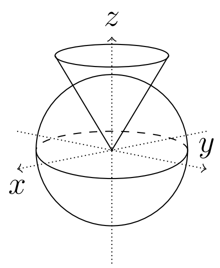
6. Integrieren Sie die Funktion $f(x,y) = \frac{1}{x}$ über den geschlossenen Bereich, der in der Figur mit Ω bezeichnet ist. Die Eckpunkte von Ω liegen alle im ersten Quadranten $Q_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ \ y \geq 0\}$.



[*7 Punkte*]

7. Bestimmen Sie mittels Parametrisierung das Volumen der Eistüte, welches durch den Kegel $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 3z^2\}$ und die Sphäre $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (mit Mittelpunkt im Ursprung) beschränkt wird, und oberhalb der (x,y)-Ebene liegt (siehe Bild).

   Bemerkung: Das Anwenden von fertigen Volumenformeln für Kegel und Kugelsegmente gibt keine Punkte.



[*6 Punkte*]

8. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0; \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Ist f stetig? *[3 Punkte]*

(b) Ist f differenzierbar? *[3 Punkte]*

(c) Ist f stetig differenzierbar? *[3 Punkte]*

9. Bestimmen Sie die Extremalstellen von $f(x, y) = xy$ auf dem Einheitskreis.

[6 Punkte]

10. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 - z^2 \\ yz^2 - x^2 \\ zx^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des Zylinders

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq H\}.$$

[6 Punkte]

11. Sei $f : [a, b] \to [a, b]$, $0 \leq a < b < \infty$, eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass f einen Fixpunkt $\xi \in [a, b]$ besitzt.

Bemerkung: Ein Punkt $\xi \in [a, b]$ heisst Fixpunkt von f, falls gilt $f(\xi) = \xi$.

[5 Punkte]