Musterlösung Basisprüfung Analysis I/II D-ITET

1. (a) Seien F, G und h stetig differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$. Es gilt

☐ $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{F(x)}^{G(x)} h(y)dy = \int_{F(x)}^{G(x)} \frac{d}{dx} h(y)dy = 0.$

☐ $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{F(x)}^{G(x)} h(y)dy = \int_{F'(x)}^{G'(x)} h(y)dy.$

■ $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{F(x)}^{G(x)} h(y)dy = h(G(x))G'(x) - h(F(x))F'(x).$

☐ $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_{F(x)}^{G(x)} h(y)dy = \int_{F(x)}^{G(x)} \frac{d}{dy} h(y)dy = h(G(x)) - h(F(x)).$

[*2 Punkte, wenn richtig angekreuzt; -1 Punkt, wenn falsch angekreuzt; 0 Punkte, wenn nichts angekreuzt.*]

(b) Der Konvergenzradius r der Reihe $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n^2+1}$ beträgt

☐ $r = \frac{1}{2}$.

☐ $r = \frac{2}{5}$.

☐ $r = 0$.

■ $r = 1$.

Begründung: Mit $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ und (in unserem Fall) $a_n = \frac{1}{n^2+1}$, sieht man, dass $r = 1$ die richtige Antwort ist.

[*2 Punkte, wenn richtig angekreuzt; -1 Punkt, wenn falsch angekreuzt; 0 Punkte, wenn nichts angekreuzt.*]

(c) Berechnen wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$, so erhalten wir

☐ ∞.

■ e^x.

☐ 0.

☐ $\mathrm{e}^x - 1$.

Begründung: Für f differenzierbar gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Somit ist der gesuchte Grenzwert e^x.

[*2 Punkte, wenn richtig angekreuzt; -1 Punkt, wenn falsch angekreuzt; 0 Punkte, wenn nichts angekreuzt.*]

2. (a) Es gilt

$$\frac{\tan(3x)}{\tan(x)} = \frac{\sin(3x)\cos(x)}{\cos(3x)\sin(x)}.$$

[1 Punkt für Umformung.]

Mit der Regel von de l'Hôpital erhalten wir schliesslich

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos(3x)\cos(x) - \sin(3x)\sin(x)}{\cos(3x)\cos(x) - 3\sin(3x)\sin(x)} = \frac{1}{3}.$$

[2 Punkte (1 Punkt für richtige Ableitung; 1 Punkt für richtiges Endresultat.)]

(b) Wir wenden zweimal die Regel von de l'Hôpital an und erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\mathrm{e}^{x^2}+4x^2\mathrm{e}^{x^2}}{2\cos^2(x)-2\sin^2(x)} = 1.$$

[3 Punkte (für jedes richtige Gleichheitszeichen oben 1 Punkt (mit FF).)]

(c) Wir dividieren im Zähler und im Nenner durch den Faktor $x^{\frac{2}{3}}$, und erhalten

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-4}{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}}{\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}} = \infty.$$

[2 Punkte (1 Punkt fürs Dividieren bzw. Argumentieren, wieso Zähler dominiert, 1 Punkt für richtiges Endresultat.)]

(d) Wir schreiben (unter Verwendung, dass die Exponentialfunktion stetig ist)

$$\lim_{x\to\infty} (x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}.$$

[1 Punkt für Idee mit $\mathrm{e}^{\log}$*.]*

Wir berechnen also den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\log\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right).$$

Da

$$\lim_{x\to\infty} x^{\pm\frac{1}{x}} = \lim \mathrm{e}^{\pm\frac{1}{x}\log(x)} = 1$$

[1 Punkt für diesen Grenzwert.]

ist, dürfen wir die Regel von de l'Hôpital anwenden. Es gilt also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\log(x)\right)}{x^{\frac{1}{x}}-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}(1-\log(x))}{1-x^{-\frac{1}{x}}}.$$

[1 Punkt für richtige Ableitung.]

Durch erneutes Anwenden von de l'Hôpital erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}(1-\log(x))}{1-x^{-\frac{1}{x}}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{-2\frac{1}{x^3}(1-\log(x)) - \frac{1}{x^3}}{-x^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\log(x)-\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2(1-\log(x))-1}{-x^{-\frac{1}{x}}x(\log(x)-1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-2}{x^{-\frac{1}{x}}x} + \frac{1}{x^{-\frac{1}{x}}x(\log(x)-1)}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

[2 Punkte (1 Punkt für erstes Gleichheitszeichen d.h. richtige Ableitung (mit FF); 1 Punkt für richtiges Endresultat (mit FF)).]

Somit ist also

$$\lim_{x\to\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

[*Wenn der Grenzwert* 0 *oben gefunden wurde, muss dieser Grenzwert hier nicht noch explizit angegeben werden.*]

3. Zuerst suchen wir die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0.$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P_\lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

sind $\lambda_1 = -1 + i$ und $\lambda_2 = -1 - i$.

[*1 Punkt*]

Die allgemeine Lösung y_h der homogenen Differentialgleichung ist also

$$y_h(x) = (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))\mathrm{e}^{-x}.$$

[*1 Punkt (mit FF.)*]

Für die partikuläre Lösung y_p machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = A\mathrm{e}^{3x}.$$

[*1 Punkt für funktionierenden Ansatz.*]

Setzen wir das in unsere Differentialgleichung ein, erhalten wir

$$9A\mathrm{e}^{3x} + 6A\mathrm{e}^{3x} + 2A\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}.$$

Mit Koeffizientenverleich gilt also

$$A = \frac{1}{17}.$$

[*1 Punkt*]

Damit ist die partikuläre Lösung y_p gegeben durch

$$y_p(x) = \frac{1}{17}\mathrm{e}^{3x}.$$

Die allgemeine Lösung y unserer Differentialgleichung ist dann

$$y(x) = \frac{1}{17}\mathrm{e}^{3x} + (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))\mathrm{e}^{-x}.$$

[*1 Punkt (mit FF.)*]

4. Wir unterscheiden drei Fälle:

Mehrdimensionale Extremalstellen: Wir berechnen den Gradienten von f und setzen diesen gleich Null. Es gilt also

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[*1 Punkt für richtigen Gradienten.*]

Somit haben wir die zwei Fälle $x_1 = 0 = y_1$ und $x_2 = 1 = y_2$, und wir erhalten die kritischen Punkte

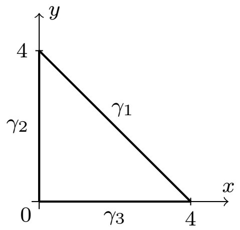
$$P_1 = (0,0) \quad \text{und} \quad P_2 = (1,1).$$

[2 Punkte (mit FF.)]

Da wir nur die globalen Extrema suchen, müssen wir nicht den Typus der Extremalstellen bestimmen. Es reicht, diese lediglich in die Funktion einzusetzen und den grössten beziehungsweise den kleinsten Funktionswert zu bestimmen. Wir erhalten also in diesem Fall

$$f(P_1) = 0 \quad \text{und} \quad f(P_2) = -1.$$

Eindimensionale Extremalstellen: Nun parametrisieren wir den Rand ∂D von D und untersuchen f auf Extremas entlang von ∂D. Seien γ_i, $1 \leq i \leq 3$, gegeben wie im Bild.



Es gilt

$$\gamma_1 : [0,4] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 4-t \end{pmatrix}$$

[1 Punkt für richtige Parametrisierung.]

und damit

$$(f \circ \gamma_1)(t) = t^3 + (4-t)^3 - 3t(4-t) = 15t^2 - 60t + 64.$$

Die Extremalstellen erhalten wir wiederum durch Ableiten und Nullsetzen:

$$(f \circ \gamma_1)'(t) = 30t - 60 \overset{!}{=} 0,$$

also $t = 2$ und damit

$$P_3 = (2,2).$$

[1 Punkt (ohne FF.)]

Der Funktionswert in P_3 beträgt

$$f(P_3) = 4.$$

Analog erhalten wir

$$\gamma_2 : [0,4] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

[1 Punkt für richtige Parametrisierung.]

mit

$$(f \circ \gamma_2)(t) = t^3,$$

also

$$(f \circ \gamma_3)'(t) = 3t^2 \overset{!}{=} 0$$

und damit $t = 0$. Wir finden also den Extremalpunkt

$$P_4 = (0,0) = P_1.$$

[1 Punkt (ohne FF.)]

Dasselbe gilt für

$$\gamma_3 : [0,4] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

[1 Punkt für richtige Parametrisierung.]

mit

$$(f \circ \gamma_3)(t) = t^3.$$

Also

$$P_5 = P_1$$

[1 Punkt (ohne FF.)]

und damit haben sie natürlich auch denselben Funktionswert wie P_1 (siehe oben).

Nulldimensionale Extremalstellen: Als Letztes müssen wir noch die Eckpunkt $P_6 = (0,0) = P_1$, $P_7 = (4,0)$ und $P_8 = (0,4)$ überprüfen. Wir setzen ein und erhalten

$$f(P_7) = f(P_8) = 64.$$

[1 Punkt]

Somit liegt das globale Maximum von f in D in den Punkten P_7 und P_8 mit dem Funktionswert $f(P_7) = f(P_8) = 64$ und das globale Minimum von f in D im Punkt P_2 mit dem Funktionswert $f(P_2) = -1$.

[3 Punkte (für jedes globale Maximum und Minimum je ein Punkt.)]

5. (a) Wir integrieren zweimal partiell und erhalten

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \sin(x)dx &= \mathrm{e}^x \sin(x) - \int \mathrm{e}^x \cos(x)dx + C \\ &= \mathrm{e}^x \sin(x) - \left(\mathrm{e}^x \cos(x) + \int \mathrm{e}^x \sin(x)dx\right) + C \\ &= \mathrm{e}^x(\sin(x) - \cos(x)) - \int \mathrm{e}^x \sin(x)dx + C.\end{aligned}$$

[2 Punkte (je ein Punkt für jede partielle Integration (ohne FF).)]

Wir definieren nun

$$I := \int \mathrm{e}^x \sin(x)dx$$

und lösen die Gleichung

$$I = \mathrm{e}^x(\sin(x) - \cos(x)) - I + C$$

nach I auf und erhalten

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin(x) - \cos(x)) + C.$$

[2 Punkte (1 Punkt für Idee mit I; 1 Punkt für richtiges Endresultat (mit FF aber wenn C fehlt 0 Punkte).)]

(b) Wir substituieren

$$\sqrt{1+x^2} = u, \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = du, \quad x^2 = u^2 - 1$$

[1 Punkt (für funktionierende Substitution.)]

mit den Grenzen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{10}$ und erhalten

$$\int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} (u^2-1)du = \left(\frac{1}{3}u^3 - u\right)\Big|_{u=\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}+\sqrt{2}}{3}.$$

[1 Punkt]

(c) Mittels Polynomdivision erhalten wir

$$\int \frac{x^3+2x+2}{x^2+2x+1}dx = \int \left(x - 2 + \frac{5x+4}{x^2+2x+1}\right) dx.$$

[2 Punkte (1 Punkt für Idee mit Polynomdivision; 1 Punkt für richtige Polynomdivision.)]

Mit Partialbruchzerlegung gilt

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \stackrel{!}{=} \frac{5x+4}{x^2+2x+1},$$

also

$$A = 5 \quad \text{und} \quad B = -1.$$

[2 Punkte]

Damit erhalten wir für das Integral

$$\int \frac{x^3+2x+2}{x^2+2x+1}dx = 5\log(|x+1|) + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C.$$

[3 Punkte (3 Punkte, wenn alles richtig; -1 Punkt bei jedem Fehler; -1 Punkt, wenn Betrag vergessen; -1 Punkt, wenn Integrationskonstante vergessen.)]

Alternativlösung: Wir schreiben

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2x+2}{x^2+2x+1} &= \int \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx \\ &= \int \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx + \log(|x^2+2x+1|) + C.\end{aligned}$$

Mittels Polynomdivision erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx &= \int \left(x - 2 + \frac{3x+2}{x^2+2x+1}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \int \frac{3x+2}{x^2+2x+1}dx + C.\end{aligned}$$

[2 Punkte (1 Punkt für Idee mit Polynomdivision; 1 Punkt für richtige Polynomdivision.)]

Mittels Partialbruchzerlegung

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2} \stackrel{!}{=} \frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

erhalten wir mit

$$A = 3 \quad \text{und} \quad B = -1$$

[2 Punkte]

für das letze Integral also

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{3}{x+1}dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2}dx = 3\log(|x+1|) + \frac{1}{x+1} + C.$$

Nehmen wir alles zusammen und vereinfachen den Ausdruck mittels Logharithmusregeln, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2x+2}{x^2+2x+1}dx &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\log(|x+1|) + \frac{1}{x+1} + \log(|x^2+2x+1|) + C\\ &= 5\log(|x+1|) + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C.\end{aligned}$$

[*3 Punkte (3 Punkte, wenn alles richtig; -1 Punkt bei jedem Fehler; -1 Punkt, wenn Betrag vergessen; -1 Punkt, wenn Integrationskonstante vergessen.)*]

(d) Wir wollen Partialbruchzerlegung anwenden. Also suchen wir die reellen Nullstellen des Nenners und erhalten

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 = x^2(x-1)(x^2+1).$$

[*1 Punkt*]

Nun setzen wir

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+1} \stackrel{!}{=} \frac{8x^4+4x^3-2x^2+3x-5}{x^5-x^4+x^3-x^2},$$

[*1 Punkt*]

machen gleichnamig und erhalten als Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} A+C+D &= 8,\\ -A+B-D+E &= 4,\\ A-B+C-E &= -2,\\ -A+B &= 3,\\ -B &= -5,\end{aligned}$$

und damit

$$A = 2, \quad B = 5, \quad C = 4, \quad D = 2 \quad \text{und} \quad E = 3.$$

[*1 Punkt (ohne FF.)*]

Also erhalten wir für unser Integral

$$\begin{aligned}\int \frac{8x^4+4x^3-2x^2+3x-5}{x^5-x^4+x^3-x^2}dx &= \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{5}{x^2}dx + \int \frac{4}{x-1}dx + \int \frac{2x+3}{x^2+1}dx\\ &= 2\log(|x|) - \frac{5}{x} + 4\log(|x-1|) + \log(|x^2+1|) + 3\arctan(x) + C\\ &= \log(x^2(x-1)^4|x^2+1|) - \frac{5}{x} + 3\arctan(x) + C,\end{aligned}$$

[*3 Punkte (3 Punkte, wenn alles richtig; -1 Punkt bei jedem Fehler; -1 Punkt, wenn Betrag vergessen; -1 Punkt, wenn Integrationskonstante vergessen.)*]

wobei wir

$$\int \frac{2x+3}{x^2+1}dx = \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{3}{x^2+1}dx = \log(|x^2+1|) + 3\arctan(x) + C$$

verwendet haben.

6. Die Schnittpunkte im ersten Quadranten sind (durch Gleichsetzen)

$$\begin{aligned}
y &= x^2 - \frac{1}{4} \quad &&\text{und} \quad y = -x + \frac{1}{2} \implies x = \frac{1}{2},\\
y &= \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2} \quad &&\text{und} \quad y = -x + \frac{1}{2} \implies x = 0,\\
y &= \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2} \quad &&\text{und} \quad y = x^2 - \frac{1}{4} \implies x = 1.
\end{aligned}$$

[*3 Punkte (für jeden richtigen Schnittpunkt 1 Punkt.)*]

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,y)d\mu &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-x+\frac{1}{2}}^{\frac{x^3}{4}+\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\, dy\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{x^2-\frac{1}{4}}^{\frac{x^3}{4}+\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\, dy\, dx\\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^3}{4} + \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^3}{4} + \frac{1}{2} - x^2 + \frac{1}{4}\right) dx\\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{4} + 1\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x^2}{4} - x + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x}\right) dx\\
&= \left(\frac{x^3}{12} + x\right)\Bigg|_{x=0}^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}\log(x)\right)\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}^{1}\\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4}\log(2).
\end{aligned}$$

[*4 Punkte (2 Punkte für das erste Gleichheitszeichen (je 1 Punkt für das richtige Doppelintegral (mit FF), mit richtigen Grenzen und Integrand), 1 Punkt für zweites Gleichheitszeichen (also wenn bei beiden Doppelintegralen das innere Integral richtig berechnet wurde), 1 Punkt für das richtige Endresultat).*l]

7. Zuerst berechnen wir die Höhe $z > 0$, bei welcher sich die Sphäre und der Kegel schneiden. Wir setzen also die Gleichungen $x^2 + y^2 = 3z^2$ und $x^2 + y^2 = 1 - z^2$ gleich und erhalten als einzig sinnvolle Lösung (da $z > 0$ sein soll) $z = \frac{1}{2}$.

[*1 Punkt für den Schnittpunkt $z = \frac{1}{2}$.*]

Für den Kegel parametrisieren wir via Polarkoordinaten

$$\text{Volumen Kegel} = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{3}z} \int_0^{2\pi} r\, d\phi dr dz = \frac{\pi}{8}.$$

Für die Haube erhalten wir ebenfalls mittels Polarkoordinaten

$$\text{Volumen Haube} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{2\pi} r\, d\phi dr dz = \frac{5\pi}{24}.$$

[*5 Punkte (2 Punkte für die 12 Grenzen (je ein Punkt, wenn alles richtig) , 1 Punkt für das Volumenelement, 2 Punkte für das richtige Endresultat (je ein Punkt, wenn richtiges Endresultat).)*]

Somit erhalten wir als Volumen

$$\text{Volumen Eistüte} = \frac{\pi}{3}.$$

Alternativ kann man direkt rechnen

$$\text{Volumen Eistüte} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} \int_0^{2\pi} r \, d\phi dz dr = \frac{\pi}{3}.$$

[6 Punkte (1 Punkt Radius $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (vergleichbar mit Schnittpunkt), 2 Punkte für die 6 Grenzen, 1 Punkt für das Volumenelement, 2 Punkte für das richtige Endresultat.)]

8. Für $x \neq 0$ ist f eine Komposition glatter Funktionen und damit insbesondere C^1. Es genügt also, den Nullpunkt zu untersuchen.

[1 Punkt, wenn irgendwo das Verhalten von f ausserhalb von 0 erwähnt wird.]

(a) Um die Stetigkeit im Nullpunkt zu untersuchen, betrachten wir den Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$. Da der Sinus beschränkt ist, gilt also

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

und wir sehen, dass f stetig ist.

[2 Punkte (1 Punkt für Idee mit Beschränktheit; 1 Punkt für Stetigkeit (Stetigkeit ohne richtige Begründung gibt 0 Punkte).)]

(b) Für $x \neq 0$ ist f glatt und hat Ableitung

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

[1 Punkt]

Damit f auch im Nullpunkt differenzierbar ist, muss der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

existieren.

[1 Punkt]

Wir setzen ein und verwenden wieder die Beschränktheit von $\sin(y)$, und erhalten

$$\lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^2 \sin\left(\frac{1}{0+h}\right) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = 0.$$

[1 Punkt]

Somit sehen wir, dass f differenzierbar ist mit Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0; \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(c) Wieder genügt es, nur den Nullpunkt zu betrachten. Somit untersuchen wir den Grenzwert $\lim_{x\to 0} f'(x)$. Dieser sollte gleich Null sein. Da $\cos(2\pi n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\cos(\pi + 2\pi n) = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, existiert der Grenzwert $\lim_{y\to\infty} \cos(y)$ nicht. Mit diesem Argument und da $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ ist, sehen wir, dass der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f'(x)$ nicht existiert. Also ist f nicht stetig differenzierbar.

[3 Punkte (1 Punkt für Divergenz des Cosinus; 1 Punkt für Konvergenz des Sinus; 1 Punkt für richtige Schlussfolgerung (nicht C^1).)]

9. Wir suchen die Extremalstellen von $f(x,y) = xy$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$. Unsere Lagrangefunktion ist damit gegeben durch

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = xy + \lambda(x^2+y^2-1).$$

[1 Punkt]

Mittels Lagrange-Multiplikatoren erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_x L(x,y,\lambda) &= y + 2\lambda x &&= 0, &(1)\\ \partial_y L(x,y,\lambda) &= x + 2\lambda y &&= 0, &(2)\\ \partial_\lambda L(x,y,\lambda) &= x^2+y^2-1 &&= 0. &(3) \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Wir rechnen $(1)\cdot x - (2)\cdot y$ und erhalten

$$2\lambda(x^2-y^2) = 0.$$

Damit erhalten wir

$$x^2 = y^2 \quad \text{oder} \quad \lambda = 0.$$

($\lambda = 0$ würde jedoch $x = 0 = y$ bedeuten, was keine Lösung unseres Gleichungssystems ist - also haben wir $x^2 = y^2$.) Setzen wir das in (3) ein, erhalten wir $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} = y$. Also haben wir die kritischen Punkte

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad P_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{und} \quad P_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

[4 Punkte]

und die Funktionswerte $f(P_1) = f(P_4) = \frac{1}{2}$ und $f(P_2) = f(P_3) = -\frac{1}{2}$.

Alternativlösung: Wir rechnen direkt

$$f(x,y) = f(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \cos(\varphi)\sin(\varphi) = \frac{1}{2}\sin(2\varphi).$$

[2 Punkte (1 Punkt für Idee; 1 Punkt für die richtige Umsetzung.)]

Diese Funktion hat ihr Maximum bei

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = -\frac{3\pi}{4}$$

und ihr Minimum bei

$$\varphi_3 = -\frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \varphi_4 = \frac{3\pi}{4}.$$

[4 Punkte]

10. Es gilt

$$\operatorname{div}(F)(x,y,z) = x^2+y^2+z^2.$$

[1 Punkt]

Mit Hilfe des Satzes von Gauss erhalten wir also

$$\begin{aligned}\int_Z \operatorname{div}(F) dV &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^H (r^2 + z^2) r \, dz d\varphi dr \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(r^3 H + \frac{1}{3} H^3 r \right) d\varphi dr \\ &= \int_0^R \left(2\pi H r^3 + \frac{2\pi}{3} H^3 r \right) dr \\ &= 2\pi H R^2 \left(\frac{R^2}{4} + \frac{1}{6} H^2 \right).\end{aligned}$$

[*5 Punkte (3 Punkte für richtige Integrationsgrenzen; 1 Punkt für richtigen Integrand; 1 Punkt für richtiges Endresultat).*]

11. Wir definieren $g(x) = f(x) - x$.

[*1 Punkt für Idee.*]

Diese Funktion ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen wieder stetig (da f stetig ist).

[*1 Punkt für Stetigkeit von g.*]

Ausserdem gilt

$$g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0 \quad \text{und} \quad g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0.$$

[*2 Punkte*]

Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $\xi \in [a, b]$, so dass $g(\xi) = 0$ ist. Damit haben wir einen Fixpunkt von f gefunden.

[*1 Punkt für Idee mit Zwischenwertsatz.*]