Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. A. Iozzi 2. Februar 2017

Analysis I & II Basisprüfung
D-ITET

Name: **Familienname, Vorname**
Legi-Nr.: Nummer
Studiengang: Fachrichtung

1

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. **Es wird nicht erwartet, dass Sie in der vorgegebenen Zeit alle Aufgaben lösen müssen, um die Bestnote zu erreichen.**
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.
- Maximalpunktzahl: 74 Punkte.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
Total		

Vollständigkeit	
Note	

Aufgabe 1.

[6 Punkte]

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x+\pi) & x > 0 \\ x^2 + x - 1 & x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Wo ist f stetig?

(b) Wo ist f differenzierbar?

(c) Wo ist f stetig differenzierbar?

Aufgabe 2.

[7 Punkte]

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right)$,

(b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$,

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$. Lösen Sie diese Aufgabe ohne Verwendung des Satzes von L'Hospital!

Aufgabe 3.

[9 Punkte]

(a) Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n \,?$$

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(n+1)} \,?$$

Aufgabe 4.

[*8 Punkte*]

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int (\log x)^2 \, dx$

(b) $\int \frac{9}{x^3-3x-2} \, dx$

Hinweis: -1 *ist eine doppelte Nullstelle des Nenners.*

Aufgabe 5.

[*4 Punkte*]

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n.$$

Aufgabe 6.

[*7 Punkte*]

Finden Sie alle Lösungen der ODE

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 50\cos(x) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

welche für $x \to \infty$ beschränkt sind.

Aufgabe 7.

[*8 Punkte*]

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie das Maximum der Funktion $x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ unter den Bedingungen $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1$.

Hinweis: Es ist nicht verlangt, dass Sie die Punkte, an denen das Maximum angenommen wird, bestimmen.

(b) Nutzen Sie Teilaufgabe (a), um die Cauchy-Ungleichung zu beweisen:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 8.

[*6 Punkte*]

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

um den Punkt $x_0 = 0$.

(b) Leiten Sie daraus die Taylorreihe von $g(x) = \arctan(x)$ um $x_0 = 0$ her.

(c) Schätzen Sie den Fehler ab, den man bei der Taylorapproximation von $\arctan(\frac{1}{2})$ mit einem Taylorpolynom fünfter Ordnung macht.

Hinweis: Falls Sie für Ihre Lösung Ableitungen von arctan benötigen (es gibt auch andere Lösungswege):

$$\begin{aligned}
\frac{d^5}{dx^5}(\arctan x) &= \frac{24(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(x^2+1)^5}, \\
\frac{d^6}{dx^6}(\arctan x) &= -\frac{240x(3x^4 - 10x^2 + 3)}{(x^2+1)^6}, \\
\frac{d^7}{dx^7}(\arctan x) &= \frac{720(7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1)}{(x^2+1)^7}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.

[*3 Punkte*]

Auf italianischen Autobahnen gibt es ein System, bei welchem an zwei verschiedenen Orten die Zeiten, zu welchen ein Auto vorbei fährt, notiert wird. Aufgrund dieser Daten werden gelegentlich Geschwindigkeitsbussen verteilt. Erklären Sie, wann eine Busse erteilt wird und was die mathematische Rechtfertigung dafür ist.

Aufgabe 10.

[*4 Punkte*]

Sei $f(x) = \sin(x) + \arctan(x)$.

(a) Begründen Sie, dass f um $x_0 = 0$ lokal invertierbar ist.

(b) Berechnen Sie $(f^{-1})'(0)$.

Aufgabe 11.

[*5 Punkte*]

Berechnen Sie das Volumen des Körpers

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + z^2 \leq (\cos(y))^2 \, , -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Aufgabe 12.

[*7 Punkte*]

Sei $v = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$ und $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z \geq 0\}$. Berechnen Sie

$$\int_S v \cdot d\sigma.$$

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. A. Iozzi | 2. Februar 2017

Analysis I & II Basisprüfung
D-ITET

Name: **Familienname, Vorname**
Legi-Nr.: Nummer
Studiengang: Fachrichtung

2

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.

- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.

- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. **Es wird nicht erwartet, dass Sie in der vorgegebenen Zeit alle Aufgaben lösen müssen, um die Bestnote zu erreichen.**

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.

- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.

- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.

- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.

- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.

- Maximalpunktzahl: 74 Punkte.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
Total		

Vollständigkeit	
Note	

Aufgabe 1.

[*6 Punkte*]

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x+\pi) & x > 0 \\ x^2 + x - 1 & x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Wo ist f stetig?

(b) Wo ist f differenzierbar?

(c) Wo ist f stetig differenzierbar?

Aufgabe 2.

[*7 Punkte*]

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right)$,

(b) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x}$. Lösen Sie diese Aufgabe ohne Verwendung des Satzes von L'Hospital!

Aufgabe 3.

[*9 Punkte*]

(a) Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n ?$$

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(n+1)} ?$$

Aufgabe 4.

[*8 Punkte*]

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int (\log x)^2 \, dx$

(b) $\int \frac{9}{x^3 - 3x - 2} \, dx$

Hinweis: -1 *ist eine doppelte Nullstelle des Nenners.*

Aufgabe 5.

[*4 Punkte*]

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{2^n - 1} \frac{1}{k} \leq n.$$

Aufgabe 6.

[*7 Punkte*]

Finden Sie alle Lösungen der ODE

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 50 \cos(x) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

welche für $x \to \infty$ beschränkt sind.

Aufgabe 7.

[*8 Punkte*]

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie das Maximum der Funktion $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ unter den Bedingungen $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1$.

Hinweis: Es ist nicht verlangt, dass Sie die Punkte, an denen das Maximum angenommen wird, bestimmen.

(b) Nutzen Sie Teilaufgabe (a), um die Cauchy-Ungleichung zu beweisen:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 8.

[*6 Punkte*]

(a) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

um den Punkt $x_0 = 0$.

(b) Leiten Sie daraus die Taylorreihe von $g(x) = \arctan(x)$ um $x_0 = 0$ her.

(c) Schätzen Sie den Fehler ab, den man bei der Taylorapproximation von $\arctan(\frac{1}{2})$ mit einem Taylorpolynom fünfter Ordnung macht.

Hinweis: Falls Sie für Ihre Lösung Ableitungen von arctan benötigen (es gibt auch andere Lösungswege):

$$\frac{d^5}{dx^5}(\arctan x) = \frac{24(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(x^2+1)^5},$$
$$\frac{d^6}{dx^6}(\arctan x) = -\frac{240x(3x^4 - 10x^2 + 3)}{(x^2+1)^6},$$
$$\frac{d^7}{dx^7}(\arctan x) = \frac{720(7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1)}{(x^2+1)^7}.$$

Aufgabe 9.

[3 Punkte]

Auf italianischen Autobahnen gibt es ein System, bei welchem an zwei verschiedenen Orten die Zeiten, zu welchen ein Auto vorbei fährt, notiert wird. Aufgrund dieser Daten werden gelegentlich Geschwindigkeitsbussen verteilt. Erklären Sie, wann eine Busse erteilt wird und was die mathematische Rechtfertigung dafür ist.

Aufgabe 10.

[4 Punkte]

Sei $f(x) = \sin(x) + \arctan(x)$.

(a) Begründen Sie, dass f um $x_0 = 0$ lokal invertierbar ist.

(b) Berechnen Sie $(f^{-1})'(0)$.

Aufgabe 11.

[5 Punkte]

Berechnen Sie das Volumen des Körpers

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + z^2 \leq (\cos(y))^2\,, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Aufgabe 12.

[7 Punkte]

Sei $v = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$ und $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z \geq 0\}$. Berechnen Sie

$$\int_S v \cdot d\sigma.$$