Analysis I & II D-ITET Basisprüfung, 2.2.2017, Lösung

Aufgabe 1

Ausserhalb von $x = 0$ ist f stetig, differenzierbar und auch stetig differenzierbar.

[*1 Punkt*]

1. Es gilt $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = -1$ und $\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = -1$, deshalb ist f auch bei 0 stetig.

   [*2 Punkte (1 für Grenzwert, 1 für Schlussfolgerung)*]

2. Die Ableitung von f ausserhalb 0 ist gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin(x+\pi) & x > 0 \\ 2x+1 & x < 0. \end{cases}$$

   Es gilt $\lim_{x\to 0, x>0} f'(x) = 0$ und $\lim_{x\to 0, x<0} f'(x) = 1$, deshalb ist f bei 0 nicht differenzierbar.

   [*2 Punkte (1 für Grenzwerte, 1 für Schlussfolgerung)*]

3. Da f bei 0 nicht differenzierbar ist, ist f dort insbesondere nicht stetig differenzierbar

   [*1 Punkt*]

Aufgabe 2

1. Wir bringen alles auf einen Hauptnenner und kürzen:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right) &= \lim_{x\to 2} \frac{x+2-4}{x^2-4} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   [*2 Punkte*]

2. Wir erweitern, um die Wurzel zu entfernen und erweitern dann mit $\frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   [*3 Punkte (1 Punkt pro Gleichheitszeichen)*]

3. Wir nutzen Taylor:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^2}{2}+\dots}{x-\frac{x^3}{6}+\dots} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{2}+\dots}{1-\frac{x^2}{6}+\dots} = 1.$$

[*2 Punkte (nur 1 Punkt bei Verwendung von l'Hospital)*]

Aufgabe 3

1. Wir wenden das Quotientenkriterium an:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{2}{3}\right)^{n}} = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{2}{3}.$$

Dies ist kleiner als 1, also konvergiert die Reihe.

[*2 Punkte*]

2. Wir berechnen zuerst den Konvergenzradius (beispielsweise mit l'Hospital)

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = 1.$$

Damit sehen wir, dass die Reihe konvergiert für $x < 1$ und divergiert für $x > 1$.

[*3 Punkte (2 für Konvergenzradius, 1 für Schlussfolgerung)*]

Es verbleiben die Punkte $x = 1$ und $x = -1$, welche wir separat betrachten müssen. Für $x = 1$ nutzen wir, dass $\log(n+1) < n$ und können so abschätzen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log(n+1)} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Die harmonische Reihe divergiert bekanntermassen, also divergiert auch unsere Reihe für $x = 1$.

[*2 Punkte*]

Für $x = -1$ haben wir eine alternierende Reihe. Da $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log(n+1)} = 0$, konvergiert die Reihe.

[*2 Punkte (Überprüfen, dass $\frac{1}{\log(n+1)} \to 0$ ist notwendig!)*]

Aufgabe 4

1. Wir wenden die Variablentransformation $y = \log(x)$ an, integrieren zweimal partiell und transformieren zurück:

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2\,dx &= \int y^2 e^y\,dy = e^y y^2 - \int 2ye^y\,dy \\ &= e^y y^2 - 2ye^y + \int 2e^y\,dy = e^y y^2 - 2ye^y + 2e^y + C \\ &= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C.\end{aligned}$$

[*3 Punkte (1 für Transformation inkl. Rücktransformation, 1 pro partielle Integration)*]

2. Mit dem Hinweis gilt $x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2$ und damit ist die Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{9}{x^3-3x-2}\,dx = \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{-4+x}{(x+1)^2}\,dx.$$

[*1 Punkt*]

Der erste Term ist

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \log|x-2| + C,$$

[*1 Punkt (mit Betrag!)*]

der zweite ist

$$\int \frac{-4+x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{3}{x+1} - \log|x+1| + C.$$

[*3 Punkte*]

Insgesamt also

$$\int \frac{9}{x^3-3x-2}\,dx = \frac{3}{x+1} + \log\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C$$

Aufgabe 5
Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion.
Induktionsverankerung $n = 1$: Dies ist offensichtlich.

[*1 Punkt*]

Induktionsschritt $n \to n+1$: Wir teilen die Summe folgendermassen auf:

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k}.$$

Der erste Term ist $\leq n$ nach Induktionsvoraussetzung. Für den zweiten Term nutzen wir, dass für alle k in dieser Summe $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{2^n}$ gilt. Da diese Summe genau 2^n Summanden hat, gilt dann

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Daraus folgt die Aussage für $n+1$.

[3 Punkte]

Aufgabe 6

Wir berechnen zuerst die homogene Lösung der ODE, also die Lösung von

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0.$$

Das dazugehörige charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ mit Lösungen $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$. Die homogene Lösung ist damit

$$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.$$

[2 Punkte]

Um eine partikuläre Lösung zu finden, machen wir den Ansatz $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ mit zu bestimmenden Konstanten a und b. Einsetzen in die ODE und auflösen der Gleichungen ergibt

$$y_p = \sin x - 7\cos x.$$

[2 Punkte]

Die allgemeine Lösung ist damit

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \sin x - 7\cos x.$$

Aus der Bedingung $y(0) = 0$ ergibt sich die Bedingung

$$C_1 = 7 - C_2.$$

[1 Punkt]

Für Beschränktheit für $x \to \infty$ bemerken wir, dass $e^{-3x}, \sin x$ und $\cos x$ ohnehin beschränkt sind. Wir müssen also nur verlangen, dass $C_2 = 0$ gilt. Also

$$C_2 = 0$$
$$C_1 = 7.$$

[*1 Punkt*]

Die einzige Lösung, welche alle Bedingungen erfüllt, ist deshalb

$$y(x) = 7e^{-3x} + \sin x - 7\cos x.$$

[*1 Punkt*]

Aufgabe 7

1. Setze $f(\vec{x}, \vec{y}) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ und $g_1(\vec{x}, \vec{y}) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, $g_2(\vec{x}, \vec{y}) = y_1^2 + \ldots + y_n^2$. Das Problem ist dann mit Langrangemultiplikatoren lösbar, indem wir die Lösungen von $\nabla g - \lambda_1 \nabla g_1 - \lambda_2 \nabla g_2 = 0$, $g_1 = g_2 = 0$ suchen. Das Symbol ∇ bezeichnet hier die Ableitung nach allen Variablen x_i und y_i. Wir kriegen folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1 - 2\lambda_1 x_1 &= 0 \\ &\ldots \\ y_n - 2\lambda_1 x_n &= 0 \\ x_1 - 2\lambda_2 y_1 &= 0 \\ &\ldots \\ x_n - 2\lambda_2 y_n &= 0 \\ x_1^2 + \ldots + x_n^2 &= 0 \\ y_1^2 + \ldots + y_n^2 &= 0. \end{aligned}$$

[*2 Punkte*]

Da wir nur das Maximum suchen und nicht die Punkte, an denen es angenommen wird, können wir im Folgenden O.B.d.A. annehmen, dass alle x_i, y_i, sowie λ_1 und λ_2 nicht negativ sind.

Die ersten n Gleichungen ergeben $y_i = 2\lambda_1 x_i$ für alle i und damit

$$1 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 4\lambda_1^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 4\lambda_1.$$

Mit obiger Annahme muss also $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ sein. (Analog gilt mit den nächsten n Gleichungen, dass $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.)

[*2 Punkte*]

Daraus folgt $x_i = y_i$ für alle i beim Maximum und das Maximum ist dann

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1.$$

[1 Punkt]

2. Um Teil (a) anwenden zu können, setzen wir

$$x_i = \frac{a_i}{(\sum_j a_j^2)^{\frac{1}{2}}}$$
$$y_i = \frac{b_i}{(\sum_j b_j^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

[1 Punkt]

Es gilt $\sum x_i^2 = \sum y_i^2 = 1$.

[1 Punkt]

Wir wissen aus (a), dass das Maximum von $\sum x_i y_i$ bei 1 liegt, hier gilt damit

$$\frac{\sum a_i b_i}{(\sum a_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum b_i^2)^{\frac{1}{2}}} \leq 1,$$

woraus die Behauptung folgt.

[1 Punkt]

Aufgabe 8

1. Wir wissen, dass die Taylorreihe von $\frac{1}{1+x}$ gegeben ist durch $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ (die geometrische Reihe). Wenn wir x^2 einsetzen, kriegen wir die Taylorreihe von $\frac{1}{1+x^2}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

[2 Punkte]

2. Da $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$, können wir die Taylorreihe von $\arctan x$ kriegen, indem wir jene für $\frac{1}{1+x^2}$ Term für Term integrieren. Damit ist

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

[2 Punkte]

Aufgabe 9

Eine Busse wird erteilt, wenn die zwei Zeiten zu nahe beieinander liegen. Genauer, falls der Quotient (Distanz zwischen Messpunkten)/(Differenz der gemessenen Zeit) grösser ist als die erlaubte Höchstgeschwindigkeit. Die mathematische Rechtfertigung ist der Mittelwertsatz, welcher besagt, dass obiger Quotient, also die Durchschnittsgeschwindigkeit, an mindestens einem Punkt angenommen wird, dass also der Autofahrer zu mindestens einem Zeitpunkt die erlaubte Höchstgeschwindigkeit überschritten hat.

[*3 Punkte (Mittelwertsatz!)*]

Aufgabe 10

1. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung (ein Korollar des impliziten Funktionentheorems) müssen wir lediglich zeigen, dass $f'(0) \neq 0$. Dies ist einfach zu sehen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x + \frac{1}{1+x^2} \\ f'(0) &= 2 \neq 0. \end{aligned}$$

[*2 Punkte*]

2. Da $f(0) = 0$ ist auch $f^{-1}(0) = 0$. Mit der Formel für die Ableitung der Umkehrabbildung gilt dann

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

[*2 Punkte*]

Aufgabe 11

Wir parametrisieren den Körper mit Zylinderkoordinaten (r, φ, y). Das ergibt

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(K) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{|\cos y|} r\, dr\, dy\, d\varphi \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^{|\cos y|} dy \\ &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos y)^2\, dy \end{aligned}$$

[*3 Punkte (auch, wenn Formel direkt hingeschrieben)*]

Damit ist das Volumen

$$\mathrm{Vol}(K) = \pi \frac{y + \sin y \cos y}{2}\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\pi^2.$$

[2 Punkte]

Aufgabe 12

Wir bezeichnen mit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z \leq 0\}$ die Halbkugel und mit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Scheibe in der z-Ebene, so dass der Rand von V die Vereinigung von S und D ist. Wir wenden den Divergenzsatz auf das Vektorfeld an, um zu schreiben:

$$\int_S v \cdot d\sigma = \int_V \operatorname{div} v \, dV - \int_D v \cdot d\sigma.$$

[1 Punkt]

Die Divergenz von v ist $\operatorname{div} v = x^2 + y^2 + z^2$. Durch die Verwendung von Kugelkoordinaten kriegen wir

$$\int_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{2\pi}{5}.$$

[3 Punkte]

Um das Integral über die Scheibe zu berechnen, bemerken wir, dass $v|_D = (0, x^2 y, 2xy)$ und dass der Normalenvektor gegeben ist durch $(0, 0, 1)$. Damit ist

$$\int_D v \cdot d\sigma = \int \int 2xy \, dx \, dy = 0,$$

wobei wir im letzten Schritt die Symmetrie ausgenutzt haben.

[2 Punkte]

Insgesamt ist damit

$$\int_S v \cdot d\sigma = \frac{2\pi}{5}.$$

[1 Punkt]