Basisprüfung Analysis I/II D-ITET

Name:	
Vorname:	
Leginummer:	

Resultat

Aufgabe	Punkte	Erstkorrektur	Zweitkorrektur
1	4		
2	8		
3	7		
4	3		
5	10		
6	9		
7	6		
8	6		
9	4		
Total	57		

Vollständigkeit	

Allgemeine Informationen

- *Erlaubte Hilfsmittel:* Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 A4-Blätter beidseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt, Wörterbücher, keine sonstige Literatur, keine Taschenrechner oder Handies.
- Bitte schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen es **im Rucksack** (nicht in der Hosentasche).
- *Prüfungsdauer:* 240 Minuten.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Hinter jeder Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktezahl.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Rechenschritte. Alle Antworten sind zu begründen.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie auf **alle** abzugebenden Blätter Ihren Namen, füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus und notieren Sie dort Ihre Leginummer.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.
- Geben Sie auch das Prüfungsblatt ab (da Sie die Multiple-Choice Aufgaben direkt auf das Aufgabenblatt lösen können).
- Bitte verwenden Sie weder rote oder grüne Stifte noch Bleistifte. Unlesbare Antworten und nicht nachvollziehbare Herleitungen werden als falsch gewertet.
- Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.

1. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. Es ist jeweils nur eine Antwort richtig. Bei jeder richtigen Antwort gibt es 1 Punkt, bei jeder falschen -1 Punkt. Sie können auch nichts ankreuzen. Das Minimum der Punktezahl bei dieser Aufgabe ist 0 Punkte. Bei Korrekturen, machen Sie ersichtlich, welches Ihre neue Antwort ist. Es wird keine Begründung erwartet. Beantworten Sie die Multiple-Choice Aufgaben direkt auf dem Aufgabenblatt und geben Sie es am Schluss ab.

[*4 Punkte*]

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = y^2\left(\frac{x^2}{2} + \cos(x) - \frac{3}{2}\right) - x^2 - \cos(x)$$

hat im Nullpunkt einen kritischen Punkt. Es gilt:

- ☐ Der Punkt $(0,0)$ ist ein Maximum von f.
- ☐ Der Punkt $(0,0)$ ist ein Minimum von f.
- ☐ Der Punkt $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt von f.
- ☐ Die Hessematrix von f ist im Nullpunkt entartet.

(b) Das Integral $\int_0^\pi x^2 \cdot \sin(x)dx$ ist gleich

- ☐ 2π.
- ☐ $\frac{1}{3}\pi$.
- ☐ $4 - \pi^2$.
- ☐ $\pi^2 - 4$.

(c) Vertauschen wir die Integrationsreihenfolge, so gilt: $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} (x^2 + \sqrt{y})dydx$ ist gleich

- ☐ $\int_0^{\sqrt{x}} \int_0^2 (x^2 + \sqrt{y})dxdy$.
- ☐ $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^2 (x^2 + \sqrt{y})dxdy$.
- ☐ $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^2 (y^2 + \sqrt{x})dxdy$.
- ☐ $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} (y^2 + \sqrt{x})dxdy$.

(d) Sei $f(x) = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n$, wobei $|x| < \frac{1}{2}$. Es gilt

☐ $f^{(33)}(0) = 33! \cdot 2^{33}$.

☐ $f^{(33)}(0) = 0$.

☐ $f^{(33)}(0) = 2^{33} \cdot 33x^{32}$.

☐ $f^{(33)}(0) = 2^{33}$.

2. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to e} \dfrac{\log(\log(x))}{a^{x-e} - 1}$ für $a > 1$, wobei log der natürliche Logarithmus ist,

(b) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$,

(c) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$ und $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$.

[*8 Punkte*]

3. Berechnen Sie die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung

$$y''(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 1 + x + x^2.$$

[*7 Punkte*]

4. Finden Sie einen Punkt $p = (c, f(c))$ auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2+x+3$ zwischen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$, wo die Tangente an den Graphen parallel ist zur Geraden, welche die Punkte $(1, 5)$ und $(2, 9)$ verbindet.

[*3 Punkte*]

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ für $\alpha \in \mathbb{R}$,

(b) $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2(x+1)} dx$.

[*10 Punkte*]

6. Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Punkt $P = (5, 5, 4)$ und dem Paraboloid $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2\}$ in $\mathbb{R}^3$.

[*9 Punkte*]

7. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes $F(x, y, z) = (x^3, -y, z)$ durch die geschlossene Oberfläche des Zylinders mit Radius $R = 2$, Höhe $H = 5$ und Grundfläche in der Ebene $z = 0$.

[*6 Punkte*]

8. Gegeben sind zwei Kurven in $\mathbb{R}^2$ definiert durch die Gleichungen

$$x^2 - 2x - \frac{y^2}{c} = 0 \quad \text{und} \quad x^2 - 8x + y + 16 - v = 0.$$

Man wähle $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $v \in \mathbb{R}$ so, dass die beiden Kurven sich an der Stelle $x = 3$ berühren.

Bemerkung: Zwei Kurven berühren sich in einem Punkt, wenn sie beide durch diesen Punkt gehen und dort die gleiche Tangente haben.

[*6 Punkte*]

9. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ gilt:

$$(1 + x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x \quad \text{für alle} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Begründen Sie alle Zwischenschritte!

[*4 Punkte*]
