Musterlösung Basisprüfung Analysis I/II D-ITET

1. (a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = y^2\left(\frac{x^2}{2} + \cos(x) - \frac{3}{2}\right) - x^2 - \cos(x)$$

hat im Nullpunkt einen kritischen Punkt. Es gilt:

■ Der Punkt $(0,0)$ ist ein Maximum von f.
☐ Der Punkt $(0,0)$ ist ein Minimum von f.
☐ Der Punkt $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt von f.
☐ Die Hessematrix von f ist im Nullpunkt entartet.

Begründung: Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 - y^2\sin(x) - 2x + \sin(x) \\ x^2y + 2y\cos(x) - 3y \end{pmatrix}$$

und somit ist der Punkt $(0,0)$ ein kritischer Punkt von f. Für die Hessematrix erhalten wir

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 - y^2\cos(x) - 2 + \cos(x) & 2xy - 2y\sin(x) \\ 2xy - 2y\sin(x) & x^2 + 2\cos(x) - 3 \end{pmatrix}$$

und damit ist

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\lambda_1 = -1 = \lambda_2$. Also ist die Matrix negativ definit und der Punkt $(0,0)$ ist ein Maximum von f.

[*1 Punkt*]

(b) Das Integral $\int_0^\pi x^2 \cdot \sin(x)dx$ ist gleich

☐ 2π.
☐ $\frac{1}{3}\pi$.
☐ $4 - \pi^2$.
■ $\pi^2 - 4$.

Begründung:
Durch zweifache partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2 \cdot \sin(x)dx &= \left(-x^2 \cdot \cos(x)\right)\Big|_{x=0}^{\pi} + 2\int_0^\pi x \cdot \cos(x)dx \\ &= \pi^2 + 2\left(x \cdot \sin(x)\Big|_{x=0}^{\pi} - \int_0^\pi \sin(x)dx\right) \\ &= \pi^2 + 2\cos(x)\Big|_{x=0}^{\pi} = \pi^2 - 4.\end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

(c) Vertauschen wir die Integrationsreihenfolge, so gilt: $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} (x^2 + \sqrt{y})dydx$ ist gleich

- ☐ $\int_0^{\sqrt{x}} \int_0^2 (x^2 + \sqrt{y})dxdy.$
- ■ $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^2 (x^2 + \sqrt{y})dxdy.$
- ☐ $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^2 (y^2 + \sqrt{x})dxdy.$
- ☐ $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} (y^2 + \sqrt{x})dxdy.$

[1 Punkt]

(d) Sei $f(x) = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n$, wobei $|x| < \frac{1}{2}$. Es gilt

- ■ $f^{(33)}(0) = 33! \cdot 2^{33}.$
- ☐ $f^{(33)}(0) = 0.$
- ☐ $f^{(33)}(0) = 2^{33} \cdot 33x^{32}.$
- ☐ $f^{(33)}(0) = 2^{33}.$

Begründung:

Wir stellen f in der Taylorreihe um 0 dar und sehen

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Durch Koeffizientenvergleich gilt also

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 2^n.$$

Somit gilt

$$f^{(33)}(0) = 33! \cdot 2^{33}.$$

[1 Punkt]

2. (a) Wir setzen $x = \mathrm{e}$ ein und sehen, dass gilt "$\frac{0}{0}$". Damit dürfen wir die Regel von de l'Hospital anwenden und erhalten

$$\lim_{x\to \mathrm{e}} \frac{\log(\log(x))}{a^{x-\mathrm{e}} - 1} = \lim_{x\to \mathrm{e}} \frac{1}{x\log(x)\log(a)a^{x-\mathrm{e}}} = \frac{1}{\mathrm{e}\log(a)}, \quad \text{für} \quad a > 1.$$

[2 Punkte (1 Punkt für richtiges Ableiten, 1 Punkt für richtiges Endresultat.]

(b) Wir erweitern den Bruch und erhalten

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)\frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}.$$

[1 Punkt für Idee mit Erweitern.]

Wir dividieren anschliessend oben und unten durch x und erhalten

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

[2 Punkte (1 Punkt für die Idee $x = \sqrt{x^2}$, $x > 0$, und 1 Punkt für das richtige Endresultat.)]

(c) Nähern wir uns dem Nullpunkt von rechts, so ist $x > 0$ und es gilt $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$. Somit ist

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

[2 Punkte (1 Punkt allgemein für richtiges Hinschreiben der Betragsfunktion, 1 Punkt für richtiges Endresultat.)]

Analog, wenn wir uns von links an 0 annähern, so ist $x < 0$, also $|x| = -x$ und der Grenzwert gibt

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

[1 Punkt]

3. Zuerst suchen wir die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y''(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 0.$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P_\lambda = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 4)(\lambda + 1)$$

sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -4$.

[2 Punkte (1 Punkt für richtigen Ansatz, um λ_i zu berechnen, 1 Punkt für richtige λ_i.)]

Die allgemeine Lösung $y_h(x)$ der homogenen Differentialgleichung ist also

$$y_h(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-4x}.$$

[1 Punkt (Mit Folgefehler, falls die λ_i oben falsch berechnet wurden.)]

Für die partikuläre Lösung $y_p(x)$ machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

[1 Punkt für einen funktionierenden Ansatz.]

Setzen wir das in unsere Differentialgleichung ein, erhalten wir

$$1 + x + x^2 = 4Ax^2 + (10A + 4B)x + (2A + 5B + 4C).$$

Mit Koeffizientenverleich gilt also

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{8} \quad \text{und} \quad C = \frac{19}{32}.$$

[1 Punkt]

Damit ist die partikuläre Lösung $y_p(x)$ gegeben durch

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{19}{32} = \frac{1}{32}(8x^2 - 12x + 19).$$

[1 Punkt (Auch wenn nicht umgeformt und mit Folgefehler.)]

Die allgemeine Lösung y unserer Differentialgleichung ist dann

$$y(x) = \frac{1}{32}(8x^2 - 12x + 19) + C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-4x}.$$

[1 Punkte(Auch wenn nicht umgeformt und mit Folgefehler.)]

4. Die Steigung der Verbindungsgeraden ist gegeben durch

$$\frac{9-5}{2-1} = 4.$$

[1 Punkt]

Also suchen wir ein c, so dass

$$f'(c) = 4$$

ist.

[1 Punkt]

Mit $f'(c) = 2c + 1$ folgt also $c = \frac{3}{2} \in [1, 2]$, somit ist $p = (c, f(c)) = \left(\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$.

[1 Punkt für richtiges c (oder p).]

5. (a) Wir machen die Fallunterscheidung $\alpha = 1$, $\alpha < 1$ und $\alpha > 1$.

[1 Punkt für Fallunterscheidung (wenn alle drei Fälle betrachtet wurden).]

Erster Fall $\boldsymbol{\alpha = 1}$: Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \log(|x|)\Big|_{x=1}^\infty = \infty.$$

[1 Punkt, wenn alles richtig ist.]

Zweiter Fall $\boldsymbol{\alpha < 1}$: Es gilt in diesem Fall

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Bigg|_{x=1}^\infty = \infty.$$

[1 Punkt, wenn alles richtig ist.]

Dritter Fall $\boldsymbol{\alpha > 1}$: Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Bigg|_{x=1}^\infty = \frac{1}{\alpha - 1} < \infty.$$

[1 Punkt, wenn alles richtig ist.]

(b) Wir machen Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x-5}{x^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}.$$

[1 Punkt, wenn richtig aufgeteilt wurde, sonst 0 Punkte.]

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir dann $A = 6$, $B = -5$ und $C = -6$.

[1 Punkt, wenn alle richtig sind.]

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \frac{x-5}{x^2(x+1)}dx &= 6\int \frac{1}{x}dx - 5\int \frac{1}{x^2}dx - 6\int \frac{1}{x+1}dx \\ &= 6\log(|x|) + \frac{5}{x} - 6\log(|x+1|) + C \\ &= 6\log\left(\left|\frac{x}{x+1}\right|\right) + \frac{5}{x} + C.\end{aligned}$$

[*4 Punkt (1 Punkt für jedes richtige Integral (wenn Betrag fehlt bei* log *gibt es dort 0 Punkte) und 1 Punkt für die Konstante. Die letzte Umformung muss nicht unbedingt gemacht werden.)*]

6. Wir lösen das mit Lagrange-Multiplikatoren.

[*1 Punkt für die Idee.*]

Wir wollen also die Funktion

$$f_1(x,y,z) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y,z) = 4 - x^2 - y^2 - z = 0$$

minimieren.

[*2 Punkte (Je ein Punkt pro Funktion.)*]

Da die Wurzelfunktion streng monoton wachsend ist, können wir auch die Funktion

$$f_2(x,y,z) = (x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2$$

unter g minimieren.

Zuerst bemerken wir, dass

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -1 \end{pmatrix}$$

nie null ist und daher ist jedes globale Minimum ein bedingt kritischer Punkt.

[*Das muss nicht unbedingt erwähnt werden.*]

Wir suchen also kritische Punkte der Lagrange'schen Hilfsfunktion

$$\begin{aligned}F(x,y,z,\lambda) &= f_2(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) \\ &= (x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 - \lambda(4 - x^2 - y^2 - z).\end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

Dazu lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\partial_x F(x,y,z,\lambda) &= 2(x-5) + 2\lambda x &= 0, \\ \partial_y F(x,y,z,\lambda) &= 2(y-5) + 2\lambda y &= 0, \\ \partial_z F(x,y,z,\lambda) &= 2(z-4) + \lambda &= 0, \\ \partial_\lambda F(x,y,z,\lambda) &= x^2 + y^2 + z - 4 = 0\end{aligned}$$

und erhalten

$$x = 1, \quad y = 1 \quad \text{und} \quad z = 2.$$

[*4 Punkte (1 Punkt für das richtige Gleichungssystem, 3 Punkte für x, y und z (-1 Punkt, wenn eines falsch ist).)*]

Der einzige bedingt kritische Punkt von f_2 auf dem Paraboloid $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = 4 - x^2 - y^2\}$ ist also $Q = (1, 1, 2)$. Dort hat f_2 den Wert 36 und der Abstand zum Punkt $P = (5, 5, 4)$ beträgt 6.

[*1 Punkt für richtigen Abstand (mit Folgefehler, wenn x, y und / oder z falsch berechnet wurden oben).*]

Tatsächlich ist $(1, 1, 2)$ die gesuchte, globale Minimalstelle. Das sieht man wie folgt: Für jedes $R > 6$ sei $B_R(P)$ die abgeschlossene Kugel mit Radius 6 um den Punkt $P = (5, 5, 4)$. Dann ist die Menge $B_R(P) \cap F$ kompakt und nicht-leer (denn $(1, 1, 2) \in B_R(P) \cap F$). Da f_2 stetig ist, nimmt f_2 auf $B_R(P) \cap F$ ein Minimum an. Da $f_2\big|_{\partial B_R(P)} = R^2 > f_2(1, 1, 2)$ und $(1, 1, 2)$ der einzige kritische Punkt im Innern ist, wissen wir, dass die Funktion f_2 ihr Minimum in $(1, 1, 2)$ annimmt. Da $R > 6$ beliebig war, ist $(1, 1, 2)$ die einzige Minimalstelle.

[*Das muss nicht unbedingt erwähnt werden.*]

7. Wir benutzen den Satz von Gauss.

[*1 Punkt für die Idee.*]

Für die Divergenz von F erhalten wir

$$\operatorname{div}(F)(x, y, z) = 3x^2.$$

[*1 Punkt*]

Mit Zylinderkoordinaten erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned}
\int_V \operatorname{div}(F)(x, y, z) dV &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 3r^2 \cos^2(\varphi) r \, dr d\varphi dz \\
&= \int_0^5 \int_0^{2\pi} 12 \cos^2(\varphi) d\varphi dz \\
&= \int_0^5 12\pi dz \\
&= 60\pi.
\end{aligned}$$

[*4 Punkte (für jedes richtige Gleichheitszeichen 1 Punkt - aufpassen beim Volumenelement und Folgefehler geben.)*]

8. Seien

$$F_1(x, y) = x^2 - 2x - \frac{y^2}{c} = 0 \quad \text{und} \quad F_2(x, y) = x^2 - 8x + y + 16 - v = 0.$$

Der Punkt $(3, y_0)$ soll ein Berührungspunkt der beiden Kurven sein. Das heisst insbesondere, dass sie den Punkt $(3, y_0)$ gemeinsam haben. Also wissen wir aus $F_1(3, y_0) = 0$, dass

$$3c = y_0^2 \tag{1}$$

ist.

[*1 Punkt*]

Analog folgt aus $F_2(3, y_0) = 0$, dass

$$y_0 = v - 1 \tag{2}$$

gilt.

[*1 Punkt*]

Da der Punkt $(3, y_0)$ ein Berührungpsunkt sein soll, wissen wir, dass gilt

$$\nabla F_1(3, y_0) = \lambda F_2(3, y_3)$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, welches noch zu bestimmen ist.
Das liefert uns die zwei Bedingungen

$$4 = -2\lambda \tag{3}$$

und

$$-\frac{2y_0}{c} = \lambda. \tag{4}$$

[2 Punkte (Je 1 Punkt für Gleichung (3) und (4).)]

Aus den Bedingungen (1), (2), (3) und (4) erhalten wir

$$\lambda = -2, \quad v = 4, \quad y_0 = 3 \quad \text{und} \quad c = 3.$$

[2 Punkt (Je 1 Punkt für v und c.)]

9. Wir beweisen die Ungleichung mittels vollständiger Induktion.
Induktionsverankerung: Wir sehen, dass die Behauptung offensichtlich für $n = 0$ und $n = 1$ gilt.

[1 Punkt]

Indunktionsschritt: Wir nehmen an, die Behauptung stimmt für n, wir haben also

$$(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

und wollen zeigen, dass

$$(1+x)^{n+1} \leq 1 + (2^{n+1} - 1)x \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1$$

gilt. Verwenden wir die Induktionsbehauptung, erhalten wir

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \leq (1+x)(1+(2^n-1)x).$$

[1 Punkt]

Durch ausmultiplizieren und verwenden, dass $x^2 \leq x$ ist für alle $x \in [0,1]$, erhalten wir schlussendlich

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \leq (1+x)(1+(2^n-1)x) \\ &= 1 + 2^n x + 2^n x^2 - x^2 \\ &= 1 + 2^n x + \underbrace{(2^n - 1)}_{\geq 0} x^2 \\ &\leq 1 + 2^n x + (2^n - 1)x \\ &= 1 + (2^{n+1} - 1)x,\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

[2 Punkt (1 Punkt, wenn irgendwo erwähnt wurde, dass $x^2 \leq x$ ist für $x \in [0,1]$ und 1 Punkt für die richtige Schlussfolgerung.]