Lösung Prüfung Analysis I/II

1. Offenbar ist die Funktion γ stetig und differenzierbar auf ganz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

[*1 Punkt*]

Daher muss man untersuchen, was an der Stelle $x = 0$ passiert.

a) Es gilt

$$\gamma(0) = \alpha = \lim_{x \to 0^+} \gamma(x)$$

[*1 Punkt*]

und

$$\lim_{x \to 0^-} \gamma(x) = \lim_{x \to 0^-} (\beta + \alpha + 1)x^7 = 0\,.$$

[*1 Punkt*]

Es folgt, dass γ an der Stelle $x = 0$ stetig ist genau dann, wenn

$$\alpha = 0\,.$$

[*1 Punkt*]

b) Um die Differenzierbarkeit zu untersuchen, müssen wir zuerst die Stetigkeit an der Stelle $x = 0$ durchsetzen, d.h. $\alpha = 0$.

[*1 Punkt*]

Die erste Ableitung von γ ist somit

$$\gamma'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}\,, & x > 0\,, \\ (\beta + 1)7x^6\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

Wir sehen leicht, dass

$$\lim_{x \to 0^+} \gamma'(x) = 1$$

[*1 Punkt*]

und

$$\lim_{x \to 0^-} \gamma'(x) = 0\,.$$

[*1 Punkt*]

Daher existiert kein β, so dass die Funktion γ an der Stelle $x = 0$ differenzierbar ist, d.h. γ ist nie differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$.

[*1 Punkt*]

2. a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + e^x}{2x^3 + \log x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x^3} = \infty\,.$$

[*1 Punkt für jede Gleichung: 1+1=2*]

b)

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2-6x+9)^2}{(e^{x^2-9}-1)^4} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2-6x+9)^2}{(x^2-9)^4}\,,$$

wobei wir die bekannte Eigenschaft

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$$

benutzt haben.

[*2 Punkte*]

Darum folgt

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2-6x+9)^2}{(e^{x^2-9}-1)^4} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)^4}{(x-3)^4(x+3)^4} = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{(x+3)^4} = 6^{-4}\,.$$

[*1 Punkt für die erste Gleichung, 1 Punkt für das Endresultat: 1+1=2*]

`Wechselweise` kann man den Limes wie

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2-6x+9)^2}{(e^{x^2-9}-1)^4} = \left(\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-6x+9}{(e^{x^2-9}-1)^2}\right)^2$$

[*1 Punkt*]

schreiben und die Regel von de l'Hospital zwei Male anwenden.

[*2 Punkte, 1 Punkt für das Endresultat: 2+1=3*]

c)

$$\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{|x|+e} - \sqrt{-x}) = \lim_{x\to -\infty} (\sqrt{-x+e} - \sqrt{-x})\,.$$

[*1 Punkt*]

Wir multiplizieren diesen Ausdruck mit $1 = \frac{\sqrt{-x+e}+\sqrt{-x}}{\sqrt{-x+e}+\sqrt{-x}}$ um zu erhalten

[*1 Punkt*]

$$\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{|x|+e} - \sqrt{-x}) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x+e+x}{\sqrt{-x+e}+\sqrt{-x}}\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

[*1 Punkt*]

Es folgt

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{|x|+e}-\sqrt{-x}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e}{\sqrt{-x+e}+\sqrt{-x}} = 0\,.$$

[*1 Punkt*]

d) Um $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x+3}{x-\log x}$ zu berechenen, bemerken wir zuerst, dass für $x>0$

$$x-\log x>0$$

gilt. Ausserdem gilt auch

$$\frac{2}{x-\log x}\le\frac{\sin x+3}{x-\log x}\le\frac{4}{x-\log x}$$

[*1 Punkt*]

weil offenbar $-1\le\sin x\le 1$ ist.

Zuletzt bemerken wir, dass $x-\log x\to\infty$ für $x\to\infty$.

[*1 Punkt*]

Mit dem Sandwichsatz schliessen wir

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x+3}{x-\log x}=0\,.$$

[*1 Punkt*]

3. `Induktionsanfang:` $n=1$.

$$u(1)=11^1-1=10\,,$$

was offenbar teilbar durch 10 ist.

[*1 Punkt*]

`Induktions-Schritt:` $n\to n+1$.

$$\begin{aligned} u(n+1)=11^{n+1}-1 &= 11^n(10+1)-1 \\ &= 11^n\cdot 10+11^n-1 \\ &= 11^n\cdot 10+u(n)\,. \end{aligned}$$

[*1 Punkt für die erste Gleichung, 1 Punkt für die letze Gleichung: 1+1=2*]

Bitte wenden!

Die Zahl $11^n \cdot 10$ ist offenbar durch 10 teilbar. Ferner ist nach Induktionsvoraussetzung auch $u(n)$ durch 10 teilbar. Wir schliessen, dass $u(n+1)$ durch 10 dividiert werden kann.

[*1 Punkt*]

4. **a)** Wir setzen $a_n := \frac{1}{\sqrt{n}+\log n}$ und bemerken, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

gilt.

[*1 Punkt*]

Weil $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ und $\log n < \log(n+1)$ für jedes $n \geq 1$ gilt, bekommen wir die Ungleichung

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\log(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{n}+\log n} = a_n \,.$$

[*1 Punkt*]

Nach dem Leibniz-Kriterium schliessen wir

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+\log n} < \infty \,.$$

[*1 Punkt für das Kriterium, 1 Punkt für das Endresultat: 1+1=2*]

b) Wir wenden das Wurzelkriterium an, um zu erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\log 2)^n}{2n+3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 2}{\sqrt[n]{2n+3/2}} = \log 2 \,.$$

[*1 Punkt für das Kriterium, 1 Punkt für* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+3/2} = 1$: *1+1=2*]

Da $\log 2 < 1$ ist, schliessen wir, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log 2)^n}{2n+3/2}$$

konvergent ist.

[*1 Punkt für* $\log 2 < 1$, *1 Punkt für das Endresultat: 1+1=2*]

Siehe nächstes Blatt!

5. Die Steigung m der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x wird durch den Ausdruck

$$m = f'(x)$$

bestimmt.

[*1 Punkt*]

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt sofort

$$f'(x) = e^{\cos x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

[*1 Punkt*]

Nun ist die Steigung der Gerade Γ gleich 1. Damit die Tangente an den Graphen von f parallel zu Γ ist, müssen wir die Bedingung

$$m = f'(x) = 1$$

[*1 Punkt*]

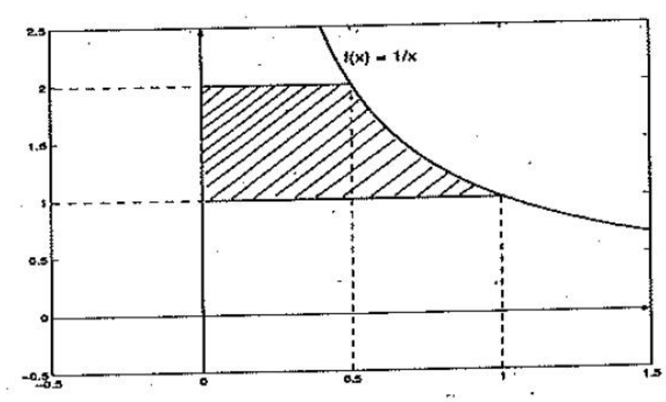
durchsetzen, d.h. $e^{\cos x} = 1$. Das ist äquivalent zu der Bedingung $\cos x = 0$.

[*1 Punkt*]

Die Lösungen dieser Gleichung sind die Zahlen $x = \pi/2 + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, d.h. an den Stellen $x = \pi/2 + k\pi$ ist die Tangente an den Graphen von f parallel zu Γ.

[*1 Punkt*]

6. Der Bereich D ist



Bitte wenden!

Die Funktion f ist stetig auf D, welches ein kompakter Bereich ist. Nach dem Satz von Weierstrass folgt sofort, dass f im Bereich D ihr Maximum und ihr Minimum erreicht.

Zuerst suchen wir die globalen Extrema von f in D°. Der Gradient von f lautet

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{-xy}(1-xy) \\ xe^{-xy}(1-xy) \end{pmatrix}.$$

[*1 Punkt*]

Wir setzen $\nabla f = 0$ durch und erhalten danach das System

$$\begin{cases} ye^{-xy}(1-xy) = 0 \\ xe^{-xy}(1-xy) = 0\,, \end{cases}$$

dessen Lösungen sind alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $xy = 1$ und der Punkt $(0,0)$.

[*1 Punkt für jede Lösung: 1+1=2*]

Allerdings gehören diese Lösungen nicht zu D°.

[*1 Punkt*]

Somit müssen wir die globalen Extrema von f auf dem Rand ∂D suchen.

Wir schreiben ∂D als

$$\partial D = \bigcup_{i=1}^{4} \gamma_i\,,$$

wobei die γ_i

$$\begin{cases} \gamma_1 = \partial D \cap \{x = 0\} \\ \gamma_2 = \partial D \cap \{y = 1\} \\ \gamma_3 = \partial D \cap \{xy = 1\} \\ \gamma_4 = \partial D \cap \{y = 2\} \end{cases}$$

sind.

Wir bekommen deshalb

1. $$f\Big|_{\gamma_1} = f(0,y) = 0\,;$$

[*1 Punkt*]

Siehe nächstes Blatt!

2.
$$f\Big|_{\gamma_2} = f(x,1) = xe^{-x} =: g_2(x)\,, \quad 0 \le x \le 1;$$

Es folgt
$$\max_{0\le x\le 1} g_2(x) = g_2(1) = e^{-1}$$

[*1 Punkt*]

und
$$\min_{0\le x\le 1} g_2(x) = g_2(0) = 0\,;$$

[*1 Punkt*]

3.
$$f\Big|_{\gamma_3} = f(x,1/x) = e^{-1}\,;$$

[*1 Punkt*]

4.
$$f\Big|_{\gamma_4} = f(x,2) = 2xe^{-2x} =: g_4(x)\,, \quad 0 \le x \le 1/2;$$

Es folgt
$$\max_{0\le x\le 1/2} g_4(x) = g_4(1/2) = e^{-1}$$

[*1 Punkt*]

und
$$\min_{0\le x\le 1/2} g_4(x) = g_4(0) = 0\,;$$

[*1 Punkt*]

Wir schliessen
$$\max_D f = e^{-1}\,, \quad \min_D f = 0\,.$$

[*2 Punkte*]

7. Wir setzen $f(x) = e^x$. Das dritte Taylorpolynom von e^x an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ ist
$$J_0^3 f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$
mit einem Restglied
$$R_3(f,0)(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4\,, \quad \xi \in (0,x)\,.$$

[*1 Punkt*]

Bitte wenden!

Sei jetzt $x = 1/2$. Weil $f^{(4)}(\xi) = e^{\xi}$,

[*1 Punkt*]

folgt

$$R_3(f,0)(1/2) = \frac{e^{\xi}}{4!}\, 2^{-4}\,, \quad \xi \in (0, 1/2)\,.$$

[*1 Punkt*]

Wir benutzen nun die Abschätzung

$$e^{\xi} < e^{1/2} < 2\,.$$

[*1 Punkt*]

Der Fehler ist deshalb beschränkt durch

$$R_3(f,0)(1/2) < \frac{2}{4!}\, 2^{-4} = \frac{1}{2^3 \cdot 4!} < 4^{-3}\,.$$

[*1 Punkt*]

8. Das charakteristisches Polynom $\chi(\lambda)$ der Gleichung ist

$$\chi(\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda - 1\,,$$

dessen Nullstellen die Zahlen

$$\lambda_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} < 0$$

und

$$\lambda_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} > 0$$

sind.

[*1 Punkt*]

Die Lösung der homogenen Gleichung ist somit

$$y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

[*1 Punkt*]

Siehe nächstes Blatt!

Um eine spezielle Lösung zu finden, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = \alpha e^x , \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$

Wir setzen y_p in der Gleichung ein und bekommen

$$2\alpha e^x + 3\alpha e^x - \alpha e^x = e^x ,$$

d.h. $\alpha = 1/4$.

[*1 Punkt*]

Die allgemeine Lösung ist deshalb

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{4} e^x , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} .$$

[*1 Punkt*]

Nun setzen wir die gegebenen Bedingungen durch. $y(0) = 0$ liefert

$$y(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{4} = 0 .$$

[*1 Punkt*]

Die zweite Bedingung liefert

$$-\infty = \lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to -\infty} C_1 e^{\lambda_1 x} = C_1 \lim_{x \to -\infty} e^{\lambda_1 x} = C_1 \cdot \infty$$

[*1 Punkt für die zweite Gleichung*]

und deshalb muss C_1 negativ sein.

[*1 Punkt*]

Die gesuchte Lösung ist somit

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} - \left(\frac{1}{4} + C_1 \right) e^{\lambda_2 x} + \frac{1}{4} e^x , \quad C_1 < 0 .$$

[*1 Punkt*]

9. a)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-2x}\, dx &= -\frac{x^2}{2} e^{-2x} \Big|_0^1 + \int_0^1 x e^{-2x}\, dx \\ &= -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{2} x e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x}\, dx \\ &= -\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - 5e^{-2} \right) . \end{aligned}$$

Bitte wenden!

[*1 Punkt für jede partielle Integration, 1 Punkt für das Endresultat: 1+1+1=3*]

b) Mit Partialbruchzerlegung können wir den Integrand als

$$\frac{2x}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}\,, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

schreiben.

[*1 Punkt*]

Der Vergleich der Koeffizienten liefert das System

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ B - 3A = 0 \end{cases}$$

dessen Lösungen die Zahlen $A = 1/2$ und $B = 3/2$ sind.

[*1 Punkt*]

Es gilt somit

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{2x}{(x+1)(x-3)}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-3}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\log|x+1| + 3\log|x-3|\right)_1^2 \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{3}{16}\,. \end{aligned}$$

[*1 Punkt für* $\log|\cdot|$, *1 Punkt für das Endresultat: 1+1=2*]

c) Mit der Substitution $t = x^{-1}\,,\ dt = -x^{-2}dx$ erhält man leicht

[*1 Punkt*]

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^{-3}\arctan(x^{-1})\,dx &= \int_{1/2}^1 t\arctan(t)\,dt \\ &= \frac{t^2}{2}\arctan(t)\Big|_{1/2}^1 - \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^{-3}\arctan(x^{-1})\,dx &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\arctan\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8}\arctan\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(t - \arctan t\right)_{1/2}^1 \end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

Siehe nächstes Blatt!

$$\int_1^2 x^{-3}\arctan(x^{-1})\,dx \quad = \quad \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} - \frac{5}{8}\arctan\frac{1}{2}\,.$$

[1 Punkt]

d) Mit den Substitutionen $t = 3x\,,\ dt = 3dx$ und $z = \cos t\,,\ dz = -\sin t dt$ erhält man

[1 Punkt für jede Substitution: 1+1=2]

$$\begin{aligned}\int -3\cos^2(3x)\sin^3(3x)\,dx \quad &= \quad \left\{\int -\cos^2(t)\sin^3(t)\,dt\right\}_{t=3x} \\ &= \quad \left\{\int -\cos^2(t)(1-\cos^2 t)\sin(t)\,dt\right\}_{t=3x}\end{aligned}$$

[1 Punkt für $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$*]*

$$\begin{aligned}\int -3\cos^2(3x)\sin^3(3x)\,dx \quad &= \quad \left\{\int z^2(1-z^2)\,dz\right\}_{z=\cos t=\cos(3x)} \\ &= \quad \left\{\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5}\right\}_{z=\cos(3x)} + K\end{aligned}$$

[1 Punkt für das richtige Integral, 1 Punkt für die Konstante: 1+1=2]

$$\int -3\cos^2(3x)\sin^3(3x)\,dx \quad = \quad \frac{\cos^3(3x)}{3} - \frac{\cos^5(3x)}{5} + K\,.$$

[1 Punkt]

10. **a)** Damit

$$\{K(x,y) = 0\}\,,$$

wobei

$$K(x,y) = x + e^{x+y} + 2y + \arctan x\,,$$

überall lokal der Graph einer Funktion $y = f(x)$ ist, müssen wir nach dem impliziten Funktionentheorem

[1 Punkt]

$$K_y(x,y) \neq 0$$

[1 Punkt]

zeigen. Wir berechnen

$$K_y(x,y) = e^{x+y} + 2\,.$$

Dieser Ausdruck ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ immer positiv und somit folgt die Behauptung.

Bitte wenden!

[*1 Punkt*]

b) Wir berechnen $K_x(x,y)$ und bekommen

$$K_x(x,y) = 1 + e^{x+y} + \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Die Ableitung von $y = f(x)$ ist gegeben durch

$$f'(x) = -\frac{K_x(x,f(x))}{K_y(x,f(x))} = -\frac{1 + e^{x+f(x)} + \frac{1}{1+x^2}}{e^{x+f(x)} + 2}\,.$$

[*1 Punkt für die Formel, 1 Punkt für das Endresultat: 1+1=2*]

11. Es gilt

$$V(\Omega) \;=\; \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \int_0^{(1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} 1\,dz\,dy\,dx$$

[*1 Punkt pro Grenze: 1+1+1=3*]

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} (1-\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \Big((1-\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{y}(1-\sqrt{x}) + y\Big)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \Big((1-\sqrt{x})^2 y - \frac{4}{3}y^{3/2}(1-\sqrt{x}) + \frac{1}{2}y^2\Big)\Big|_{y=0}^{(1-\sqrt{x})^2}\,dx
\end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \int_0^1 \Big((1-\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})^2 - \frac{4}{3}(1-\sqrt{x})^3(1-\sqrt{x}) + \frac{1}{2}(1-\sqrt{x})^4\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-\sqrt{x})^4\,dx
\end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \frac{1}{6}\int_0^1 (1 - 4\sqrt{x} + 6x - 4x^{3/2} + x^2)\,dx \\
&= \frac{1}{6}\Big(1 - \frac{8}{3} + 3 - \frac{8}{5} + \frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{90}.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

[*2 Punkte*]

12. Es gibt zwei Möglichkeiten: mit direkter Berechnung oder mit dem Satz von Stokes.

- Es gilt

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Fläche S kann in dieser Art

$$r : T \to \mathbb{R}^3$$
$$r(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden,

[*1 Punkt*]

wobei T die Menge

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

bezeichnet. Deshalb gilt

$$r_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix}$$

und

$$r_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix}.$$

Deshalb bekommt man

$$r_x \times r_y = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[*1 Punkt*]

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_S \text{rot } F \cdot n \, d\omega &= \int_T \text{rot}\, F \cdot r_x \times r_y \, dxdy \\
&= \int_T (-2x - 2y - 1) \, dxdy \\
&= -2 \int_T (x + y) \, dxdy - \pi \\
&= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2(\cos\vartheta + \sin\vartheta) \, dr d\vartheta - \pi \\
&= -2 \int_0^{2\pi} (\cos\vartheta + \sin\vartheta) \, d\vartheta \cdot \int_0^1 r^2 \, dr - \pi \\
&= 0 \cdot \int_0^1 r^2 \, dr - \pi \\
&= -\pi \, .
\end{aligned}$$

[*2 Punkte*]

- Es ist genug den Ausdruck

$$\int_{\partial S} F \cdot dx$$

zu berechnen.

[*1 Punkt*]

Wir parametrisieren ∂S in dieser Art

$$[0, 2\pi] \ni t \mapsto r(t) = (\cos t, \sin t, 0) \, .$$

[*1 Punkt*]

Daraus folgt

$$r'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

und

$$\begin{aligned}
\int_S \text{rot } F \cdot n \, d\omega &= \int_{\partial S} F \cdot dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\sin t \cdot \sin t + 0 \cdot \cos t + \cos t \cdot 0\right) \, dt
\end{aligned}$$

[*1 Punkt*]

$$\begin{aligned}
\int_S \text{rot } F \cdot n \, d\omega &= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t \, dt \\
&= -\pi \, .
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

[*1 Punkt*]

[*Gesamtpunktezahl: 96 Punkte*]