Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Prof. Dr. A. Iozzi — 15. August 2016

Analysis I & II Basisprüfung
D-ITET

Name: **Familienname, Vorname**
Legi-Nr.: Nummer
Studiengang: Fachrichtung

1

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. **Es wird nicht erwartet, dass Sie in der vorgegebenen Zeit alle Aufgaben lösen müssen.**
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.
- Maximalpunktzahl: 96 Punkte.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
Total		

Vollständigkeit	
Note	

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie die Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so dass die Funktion

$$\gamma(x) = \begin{cases} \arctan(x) + \alpha\,, & \text{falls } x \geq 0\,, \\ (\beta + \alpha + 1)x^7\,, & \text{falls } x < 0\,, \end{cases}$$

(a) stetig

[4 Punkte]

(b) differenzierbar

[4 Punkte]

auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2.

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + e^x}{2x^3 + \log x^2}\,,$

[2 Punkte]

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2 - 6x + 9)^2}{(e^{x^2-9} - 1)^4}\,,$

[4 Punkte]

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{|x| + e} - \sqrt{-x})\,,$

[4 Punkte]

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x + 3}{x - \log x}\,.$

[3 Punkte]

Aufgabe 3.

Wir betrachten die ganze Zahl

$$u(n) := 11^n - 1\,,$$

mit $n \in \{1, 2, 3, \cdots\}$.

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $u(n)$ durch 10 teilbar ist.

[4 Punkte]

Aufgabe 4.

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+\log n}\,,$

[4 Punkte]

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log 2)^n}{2n+3/2}\,.$

[4 Punkte]

Aufgabe 5.

Betrachten Sie die Funktion

$$\mathbb{R}\ni x\mapsto f(x)=\int_{-1}^{x}e^{\cos t}\,dt$$

und die Gerade $\Gamma:\ y=x+7$.

In welchen Punkten $x\in\mathbb{R}$ ist die Tangente an den Graphen von f parallel zu Γ?

[5 Punkte]

Aufgabe 6.

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y)=xye^{-xy}$$

im Bereich $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, 1\leq y\leq 2, |xy|\leq 1\}$.

[12 Punkte]

Aufgabe 7.

Beweisen Sie, dass, wenn man $\sqrt{e}$ mit einem Taylorpolynom dritten Grades um die Entwicklungsstelle $x_0=0$ approximiert, der dabei entstehende Fehler kleiner als 4^{-3} ist.

[5 Punkte]

Aufgabe 8.

Bestimmen Sie die Lösungen $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$2y''(x) + 3y'(x) - y(x) = e^x\,,$$

welche die Bedingungen

$$\begin{cases} y(0) = 0\,, \\ \lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty \end{cases}$$

erfüllen.

[8 Punkte]

Aufgabe 9.

Berechnen Sie die folgenden Integrale und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-2x}\,dx$

[3 Punkte]

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x}{(x+1)(x-3)}\,dx$

[4 Punkte]

(c) $\displaystyle\int_1^2 x^{-3}\arctan(x^{-1})\,dx$

[4 Punkte]

(d) $\displaystyle\int -3\cos^2(3x)\sin^3(3x)\,dx\,.$

[6 Punkte]

Aufgabe 10.

Betrachten Sie die Funktion $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto K(x,y) = x + e^{x+y} + 2y + \arctan x\,.$$

(a) Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung der Gleichung $K(x, y) = 0$. Begründen Sie die folgende Aussage.
Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass es für jedes $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ ein $y = f(x)$ gibt mit

$$K(x, f(x)) = 0\,;$$

[*3 Punkte*]

(b) Geben Sie die Ableitung f' an.

[*2 Punkte*]

Aufgabe 11.

Bestimmen Sie das Volumen des Körpers

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\right\}\,.$$

[*7 Punkte*]

Aufgabe 12.

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

und die Fläche

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\right\}\,.$$

Berechnen Sie $\int_S \operatorname{rot} F \cdot n \, d\omega$.

[*4 Punkte*]

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich
Prof. Dr. A. Iozzi 15. August 2016

Analysis I & II Basisprüfung
D-ITET

Name:	**Familienname, Vorname**	2
Legi-Nr.:	Nummer	
Studiengang:	Fachrichtung	

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten (10 beidseitige A4-Blätter oder 20 A4-Bätter einseitig), selbstverfasst von Hand oder getippt. Wörterbücher. Keine sonstige Literatur, kein Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. **Es wird nicht erwartet, dass Sie in der vorgegebenen Zeit alle Aufgaben lösen müssen.**
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.
- Maximalpunktzahl: 96 Punkte.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
Total		

Vollständigkeit	
Note	

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie die Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so dass die Funktion

$$\gamma(x) = \begin{cases} \arctan(x) + \alpha\,, & \text{falls } x \geq 0\,, \\ (\beta + \alpha + 1)x^7\,, & \text{falls } x < 0\,, \end{cases}$$

(a) stetig

[4 Punkte]

(b) differenzierbar

[4 Punkte]

auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2.

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + e^x}{2x^3 + \log x^2}\,,$

[2 Punkte]

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2 - 6x + 9)^2}{(e^{x^2-9} - 1)^4}\,,$

[4 Punkte]

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{|x| + e} - \sqrt{-x}\right),$

[4 Punkte]

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x + 3}{x - \log x}\,.$

[3 Punkte]

Aufgabe 3.

Wir betrachten die ganze Zahl

$$u(n) := 11^n - 1\,,$$

mit $n \in \{1, 2, 3, \cdots\}$.

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $u(n)$ durch 10 teilbar ist.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 4.

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+\log n}$,

[*4 Punkte*]

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log 2)^n}{2n+3/2}$.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 5.

Betrachten Sie die Funktion

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \int_{-1}^{x} e^{\cos t}\, dt$$

und die Gerade $\Gamma: \; y = x + 7$.

In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Tangente an den Graphen von f parallel zu Γ?

[*5 Punkte*]

Aufgabe 6.

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = xye^{-xy}$$

im Bereich $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 1 \leq y \leq 2, |xy| \leq 1\}$.

[*12 Punkte*]

Aufgabe 7.

Beweisen Sie, dass, wenn man $\sqrt{e}$ mit einem Taylorpolynom dritten Grades um die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ approximiert, der dabei entstehende Fehler kleiner als 4^{-3} ist.

[*5 Punkte*]

Aufgabe 8.

Bestimmen Sie die Lösungen $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$2y''(x) + 3y'(x) - y(x) = e^x \,,$$

welche die Bedingungen

$$\begin{cases} y(0) = 0\,, \\ \lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty \end{cases}$$

erfüllen.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 9.

Berechnen Sie die folgenden Integrale und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-2x}\,dx$

[*3 Punkte*]

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x}{(x+1)(x-3)}\,dx$

[*4 Punkte*]

(c) $\displaystyle\int_1^2 x^{-3}\arctan(x^{-1})\,dx$

[*4 Punkte*]

(d) $\displaystyle\int -3\cos^2(3x)\sin^3(3x)\,dx\,.$

[*6 Punkte*]

Aufgabe 10.

Betrachten Sie die Funktion $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto K(x, y) = x + e^{x+y} + 2y + \arctan x\,.$$

(a) Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine Lösung der Gleichung $K(x, y) = 0$. Begründen Sie die folgende Aussage.
Es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass es für jedes $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ ein $y = f(x)$ gibt mit

$$K(x, f(x)) = 0\,;$$

[*3 Punkte*]

(b) Geben Sie die Ableitung f' an.

[*2 Punkte*]

Aufgabe 11.

Bestimmen Sie das Volumen des Körpers

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1\right\}\,.$$

[*7 Punkte*]

Aufgabe 12.

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

und die Fläche

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\right\}\,.$$

Berechnen Sie $\int_S \operatorname{rot} F \cdot n\, d\omega$.

[*4 Punkte*]