

# PVK Analysis 1, 2019

Michael Baumgartner, michbaum@student.ethz.ch  
Sandro Giacomuzzi, sandrog@student.ethz.ch

28. April 2020

## Vorwort

Das nachfolgende Skript basiert grösstenteils auf der Arbeit von Sandro Giacomuzzi für den PVK im Jahr 2018 und wurde von mir für den diesjährigen PVK übernommen, angepasst und ausgearbeitet. Ich danke an dieser Stelle Sandro für die tolle Arbeit aus dem letzten Jahr und für die Möglichkeit, auf seiner Arbeit aufbauen zu dürfen. Das Skript soll als Begleitlektüre für den Prüfungsvorbereitungskurs dienen und beinhaltet unzählige, in meinen Augen wichtige und repräsentative, Beispiele fürs selber lösen. Es soll in keiner Art und Weise eine komplette Zusammenfassung der Analysis 1 Vorlesung sein, es wird insbesondere sehr wenig auf die durchaus interessanten Spezialfälle und Theorien eingegangen. Ich halte mich bei der Themen- und Übungsauswahl weitestgehend an die alten Prüfungen von Prof. Iozzi, welche dem AMIV vorliegen, sowie an den Übungsserien, welche ihr im ersten Semester erhalten habt.

Ich kann keine Garantie auf Korrektheit geben. Insbesondere war ich in diesem Jahr kein Assistent für die Analysis 1 Vorlesung, falls ich also etwas für die Vorlesung zentrales vergessen oder aber die Schwerpunkte falsch gelegt haben sollte, dann entschuldige ich mich dafür. Ihr müsst am Ende immer selbst abwägen, was die wichtigsten Themen der Vorlesung waren. Ich bin immer dankbar, wenn ihr mir allfällige Fehler im Skript per E-Mail melden würdet, dann kann ich sie beheben und die neue Version hochladen. Die neuste Version dieses Skriptes (solange es unter meiner Obhut ist) findet ihr immer auf meiner Webseite: <https://n.ethz.ch/michbaum/>

Analysis ist ein Fach, in dem man sich schnell in einzelnen Details und Spezialfällen verlieren kann (Zeitprobleme sind vorprogrammiert!). Ich hoffe deshalb mit diesem Skript dem Leser den nötigen Fokus zu geben und den Start in die Lernphase zu erleichtern. Insbesondere versuche ich ein Gefühl für die (für uns) wichtigen Begriffe zu vermitteln und eine Guideline für die Herangehensweise typische Prüfungsaufgaben bereit zu stellen.

Ich wünsche einen guten PVK und viel Erfolg bei der Prüfung!

Version	Datum	Änderung	Autor
v1.0	21.06.2018	Erstellung des PVK-Skriptes in seiner ersten Version für den Sommer-PVK 2018 (Prof. Dr. Willwacher)	Sandro Giacomuzzi
v2.0	24.04.2019	Überarbeitung des Skriptes und Ergänzung/Anpassung für den Sommer-PVK 2019 (Prof. Dr. Iozzi) Ausserdem Erstellung eines Lösungsskriptes für die Übungsaufgaben in diesem Skript.	Michael Baumgartner
v2.1	21.06.2019	Behebung von Fehlern und Ergänzungen auf S.13 (Maj.), S.14 (Quot.), S.19 (Domnianzen), S.30 (Additivität), S.36 (Formel)	Michael Baumgartner
v2.2	11.07.2019	Vergessene Wurzel in der geschlossenen Formel für Integrale rationaler Funktion ergänzt.	Michael Baumgartner

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Allgemeines</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Was im Skript fehlt</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>6</b>
3.1	Folgen . . . . .	6
3.1.1	Begriffe . . . . .	6
3.1.2	Beweis durch vollständige Induktion . . . . .	6
3.1.3	Konvergenzverhalten von Folgen . . . . .	8
3.2	Reihen . . . . .	11
3.2.1	Wichtige Reihen . . . . .	11
3.2.2	Konvergenzkriterien . . . . .	12
3.2.3	Potenzreihe . . . . .	14
3.2.4	Taylorreihe . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Grenzwerte von Funktionen</b>	<b>19</b>
4.1	Methoden . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Kurvendiskussion</b>	<b>24</b>
5.1	Stetigkeit . . . . .	24
5.1.1	Lipschitz-stetig . . . . .	25
5.1.2	Überprüfen auf Stetigkeit . . . . .	26
5.2	Differenzierbarkeit . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>29</b>
6.1	Grundlagen . . . . .	29
6.2	Riemannsche Summen . . . . .	30
6.3	Partielle Integration . . . . .	31
6.4	Substitution . . . . .	32
6.4.1	Bestimmtes Integral . . . . .	33
6.4.2	Unbestimmtes Integral . . . . .	34
6.4.3	Standardsubstitutionen . . . . .	35
6.5	Integration rationaler Funktionen . . . . .	36
6.6	Uneigentliche Integrale . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)</b>	<b>38</b>
7.1	Lineare ODE mit konstanten Koeffizienten . . . . .	38
7.1.1	Homogene Lösung . . . . .	38
7.1.2	Partikuläre Lösung . . . . .	40
7.1.3	Ansatz vom Typ der rechten Seite . . . . .	40
7.1.4	Methode der Variation der Konstanten . . . . .	45
7.2	Separation der Variablen . . . . .	47
7.3	Eulersche Differentialgleichungen . . . . .	48

# 1 Allgemeines

## **Lernstrategien**

Ich habe im Laufe meines Studiums viele verschieden erfolgreiche Lernstrategien kennengelernt. Ich lege den unerfahrenen Studenten deshalb ans Herz, sich auf die Suche nach dem eigenen optimalen Studium-Bewältigungskonzept zu begeben, welches sich sehr wahrscheinlich von den Methoden der Kollegen unterscheiden wird.

## **Lernphase**

Für die vorlesungsfreie Zeit warne ich vor dem Überarbeitungs-Loch! Der Lernberg scheint unüberschaubar gross und vielleicht wird er diesen Sommer so gross sein wie nie mehr in eurem Leben. Einige besonders willensstarke Studenten bringen es deshalb fertig, monatelang über zehn Stunden am Tag durchzuarbeiten. Es kann passieren (!), dass man in einen Burnout-ähnlichen Zustand fällt. Der Körper wird sofort müde und verkrampft sobald man auch nur ans Lernen denkt. Falls dieser Zustand kurz vor den Prüfungen oder sogar während den Prüfungen eintritt, könnten die Konsequenzen fatal sein. Ich rate deshalb euch nicht all zu sehr mit Kollegen zu vergleichen und euren eigenen (gesunden) Lernrhythmus zu finden (der Sommer ist eher ein Marathon als ein Sprint). Versucht auch etwas Spass zu haben;)

## **Tag vor der Prüfung**

Zur Prüfung hin gebe ich den Rat den Lernberg immer mehr nur noch auf die Aufgabentypen, die noch Mühe bereiten, zu kondensieren. So erhält man ein motivierendes Gefühl der Überschaubarkeit des Stoffes. Der Tag direkt vor der Prüfung rate ich eher als lockeren Repetitionstag einzuplanen, anstatt sich durch die wenigen Themen zu quälen, die noch immer nicht so sitzen (Mut zur Lücke!).

## **Zusammenfassung**

In den meisten Fächer, so auch in Analysis, kann eine Zusammenfassung an die Prüfung mitgenommen werden. Es gibt in vielen Fächer bereits sehr gute Zusammenfassungen online (z.B. auf der AMIV Seite oder auch auf meiner Webseite) und es ist unter Umständen zeitsparend sich an diesen zu orientieren oder sie sogar zu übernehmen. Andererseits ist der Prozess des Zusammenfassens für viele sehr gewinnbringend, und eine eigene Zusammenstellung ermöglicht es diese speziell für eigene Schwächen und Stärken zu optimieren. So oder so, eine Zusammenfassung bringt nur (!) etwas, wenn man sie kennt und eingearbeitet hat.

## 2 Was im Skript fehlt

Ich habe im Vorwort bereits angekündigt, dass dieses Skript in keiner Weise vollständig ist, ich möchte aber noch ein wenig darauf eingehen, was im Skript nicht behandelt wurde und wo man bei Interesse mehr Informationen zu diesen Themen finden kann.

### Stetigkeit

Ich habe kein Wort über die gleichmässige Stetigkeit verloren, da ich, nach Bearbeitung eurer Unterlagen, davon ausgegangen bin, dass ihr diese nicht behandelt habt, und sie auch nicht Prüfungsrelevant sein sollte. Ausserdem wird auch nichts zu spezifischen Stetigkeitskriterien wie z.B. dem Folgekriterium gesagt. Mehr Informationen dazu findet ihr im Königsberger.

### Folgen

Ich habe nichts zu Grenzwerten von Rekursionsfolgen aufgeschrieben, da ich in euren Übungen und in den alten Prüfungen keine Aufgaben dazu fand. Falls ihr dies doch behandelt haben solltet, so könnt ihr dazu Übungen im C.T.Michaels Analysis 1 finden.

### Reihen

Es gäbe unzählige Konvergenzkriterien für Reihen, ich habe mich auf die von euch behandelten beschränkt. Falls ihr euch für mehr Kriterien interessiert, so ist im C.T.Michaels Analysis 1 eine breite Anzahl davon vertreten. Ich halte die besprochenen Kriterien jedoch für absolut ausreichend. Ebenfalls wurde meines Wissens in der Vorlesung nichts zum Umordnungssatz von Reihen gesagt, also habe ich dies auch nicht weiter behandelt.

### Potenzreihen

Die Inversion einer Potenzreihe sollte euch eigentlich aus der Komplexen Analysis Vorlesung bekannt sein, deshalb wird dies hier auch nicht weiter behandelt. Ausserdem habe ich in euren Unterlagen keine Aufgaben diesbezüglich gefunden.

### Integrale

Das Kapitel zu Integralsubstitutionen wurde kurz gehalten und ich habe auf eine Auflistung aller Möglichen Substitutionen verzichtet. Diese könnt ihr im Königsberger auf Seite 209 finden. Diverse Beispiele hierzu findet ihr im C.T.Michaels. Integrale allgemein sind eine extreme Übungssache, bis ihr einmal ein Gefühl dafür entwickelt.

### Differentialgleichungen

Ich habe mich im Skript auf die häufigsten und wichtigsten DGL-Typen beschränkt. Es gibt auch hier noch unzählige weitere Interessante Typen, welche ihr im C.T.Michaels Analysis 1 nachlesen könnt, falls ihr das wünscht. Seit aber versichert, dass an Prüfungen nichts allzu komplexes kommen wird.

## 3 Folgen und Reihen

### 3.1 Folgen

Eine Folge ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen auf die komplexen Zahlen. Ich werde mich vorläufig auf die reellen Zahlen beschränken da der komplexe Fall in der komplexen Analysis zu genüge diskutiert wird und an der Analysis 1 Prüfung typischerweise nicht gefragt wird.

#### 3.1.1 Begriffe

Dies ist eine Zusammenstellung wichtiger Begriffe/Definitionen. Unbekannte oder unklare Begriffe sollten unbedingt nachgeschlagen werden.

- Konvergente Folgen
- Nullfolge
- Beschränkte Folgen
- Monotone (wachsend/fallend) Folgen
- Grenzwert/Limes
- Umgebung eines Punktes
- Häufungswerte von Folgen

#### 3.1.2 Beweis durch vollständige Induktion

Eine Folge wird häufig entweder **explizit** oder **rekursiv** dargestellt. Um zu beweisen, dass eine gegebene implizite Folge äquivalent zu einer gewisse expliziten Folge ist, muss man typischerweise einen Beweis durch **vollständige Induktion** liefern. Dieser Beweistyp kann auch verwendet werden um die Gültigkeit von expliziten Folgedarstellungen zu beweisen. Der Beweis führt über zwei Schritte, dem **Induktionsanfang** und dem **Induktionsschritt**.

#### Beispiel 1:

Beweisen Sie ausgehend von der rekursiven Darstellung der Fibonacci Folge,  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ,  $f_0 = f_1 = 1$ , deren explizite Form:  $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1})$ , wobei  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

#### Lösung

Da die rekursive Darstellung von beiden vorherigen Glieder abhängt, müssen wir den Induktionsanfang (Verankerung) für die Glieder  $f_0$  und  $f_1$  machen:

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{0+1} - (1-\varphi)^{0+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\varphi - 1) = 1 \checkmark$$
$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{1+1} - (1-\varphi)^{1+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^2 - (1-2\varphi + \varphi^2)) = 1 \checkmark$$

Induktionsschritt  $f_{n-1}, f_n \rightarrow f_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (1-\varphi)^n) \end{aligned}$$

Bis dahin konnten wir schön nach Kochrezept vorgehen. Die einzig wirkliche Arbeit folgt jetzt. Wir müssen die rechte Seite der Gleichung geschickt umformen, sodass wir auf die zu beweisende Behauptung kommen. Für einfachere Darstellung verwende ich die Identität:  $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\varphi} = -\varphi$ .

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - (1-\varphi)^{n+1} + \varphi^n - (1-\varphi)^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n(\varphi + 1) - (1-\varphi)^n(1-\varphi + 1)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1}(1 + \frac{1}{\varphi}) - (1-\varphi)^{n+1}(1 + \frac{1}{1-\varphi})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1}(1 + \varphi - 1) - (1-\varphi)^{n+1}(1 - \varphi)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - (1-\varphi)^{n+2}), \end{aligned}$$

wobei in der zweitletzten Umformung die Identität verwendet wurde. Diese Form stimmt nun in der Tat mit der expliziten Folgedarstellung überein und beweist deshalb die Behauptung für alle  $n$ .

### Übung 1, Prüfung Sommer 2016:

Wir betrachten die ganze Zahl

$$u(n) = 11^n - 1$$

mit  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass  $u(n)$  durch 10 teilbar ist.

#### Lösung

Induktionsanfang ( $n = 1$ ):

$$u(1) = \dots$$

Induktionsschritt ( $n \rightarrow n + 1$ ):

(Zeige, dass wenn  $u(n)$  durch 10 teilbar ist auch  $u(n + 1)$  durch 10 teilbar ist)

$u(n+1)=\dots$

**Übung 2, Prüfung, Winter 2017:**

Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$u(n) = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n$$

Induktionsanfang ( $n=1$ ):

$u(1)=$

Induktionsschritt ( $n \rightarrow n + 1$ ):

$u(n+1)=$

**3.1.3 Konvergenzverhalten von Folgen**

Ein weiterer wichtiger Aufgabentyp ist das Untersuchen von Folgen auf Konvergenz. Sei  $a_1, a_2, a_3, \dots$  eine Folge. Wir sind daran interessiert, ob der Limes  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existiert und wenn ja, wie er lautet.



Folgende Grenzwerte sind Kandidaten für die Zusammenfassung (Königsberg, Kapitel 5.1):

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} = 0$ , für jedes positive  $s \in \mathbb{Q}$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ , für jedes reelle  $a > 0$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , für jedes  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$ , für jedes  $k \in \mathbb{N}$  und  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| > 1$ .

Der Limes ist ein linearer Operator und kommutiert mit Multiplikation/Division.

**Falls die Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  existieren** gelten deshalb folgende Regeln (in Zusammenfassung):

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , für alle  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$

Problematisch sind die undefinierten Ausdrücke  $0 \cdot \infty$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ . Ansonsten können wir folgende 'Regeln' anwenden:

Sei  $c \in \mathbb{R}^+$  eine positive Konstante. Dann gilt:

- $\pm c \cdot \infty = \pm \infty$
- $c \pm \infty = \infty$
- $\frac{c}{\pm \infty} = 0$
- $\frac{\pm c}{0} = \pm \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$

Nun folgen ein paar häufig anwendbare Tricks.

1. **Brüche** durch die grösste Potenz des Nenners teilen.

**Beispiel 2** ( $\frac{\infty}{\infty}$ ):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 7n}{2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{7}{n^2}}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2$$

2. Das Erweitern mit der dritten binomischen Formel (die, bei der die Zwischenglieder verschwinden) ist oft bei **Wurzelthermen** nützlich, um die Wurzeln zwischen Zähler und Nenner hin und her zu schieben und 'Bewegung' in die Vorzeichen zu bringen.

**Beispiel 3** ( $\infty \cdot 0$ ):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1 + \frac{1}{n} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Beispiel 4** ( $\infty - \infty$ ):

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  zwei positive Konstanten und  $n > b$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a+n} - \sqrt{n-b}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a+n} - \sqrt{n-b}) \cdot \frac{\sqrt{a+n} + \sqrt{n-b}}{\sqrt{a+n} + \sqrt{n-b}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+n) - (n-b)}{\sqrt{a+n} + \sqrt{n-b}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+b}{\sqrt{a+n} + \sqrt{n-b}} = \frac{a+b}{\infty + \infty} = 0 \end{aligned}$$

3. Falls es einem gelingt eine obere und untere Schranke für  $a_n$  zu finden ( $c_1(n) \leq a_n \leq c_2(n)$ , die Schranken können i.a. von  $n$  abhängig sein), so hat man gezeigt, dass die Folge beschränkt ist. Wenn man zusätzlich zeigt, dass sie monoton ist ( $a_n \leq a_{n+1}$  (wachsend) bzw.  $a_n \geq a_{n+1}$  (fallend)), so ist die Folge zusätzlich auch konvergent. Dies folgt aus dem Satz der monotonen Konvergenz. In glücklichen Fällen, kann man eine obere und untere Schranke finden, deren Limes übereinstimmen ( $\lim_{n \rightarrow \infty} c_1(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_2(n)$ ). Daraus folgt dann, dass der Limes der Folge selbst zu diesem Wert konvergieren muss.

**Beispiel 5:**

Seien  $u, v \in \mathbb{R}^+$  positive reelle Zahlen so dass  $u > v$  gilt. Wir wollen die Folge  $a_n = \sqrt[n]{u^n + v^n}$  mit  $n \geq 1$  untersuchen.

Untere Schranke:

$$a_n = \sqrt[n]{u^n + v^n} \geq \sqrt[n]{u^n} = u$$

Obere Schranke:

$$a_n = \sqrt[n]{u^n + v^n} \leq \sqrt[n]{2u^n} = \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{u^n} = \sqrt[n]{2}u$$

Wir haben also die Ungleichung  $u \leq a_n \leq \sqrt[n]{2}u$ . Die untere Schranke hat trivial einen Grenzwert, da sie unabhängig von  $n$  ist. Der Grenzwert der oberen Schranke finden wir zusammen mit der Formelsammlung, da  $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$ . Die Folge ist also beschränkt und hat den Limes:

$$u \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2}u = 1 \cdot u = u$$

Da die untere und obere Schranke in  $u$  übereinstimmen, muss die Folge gegen  $u$  konvergieren.

## 3.2 Reihen

In der Prüfung kommen garantiert Aufgaben zu Reihen dran. Meist ist es eine Aufgabe zu gewöhnlicher Reihenkonvergenz und eine Aufgabe zu Potenzreihen, welche wir später besprechen. Wir betrachten also die unendliche Summe einer Folge:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Wann können wir einen Grenzwert für diese unendliche Summe finden?

### 3.2.1 Wichtige Reihen

Die nachfolgenden Reihen werden euch durchs gesamte Studium begleiten und lohnen sich auswendig zu lernen.

Die **Geometrische Reihe**:

Sei  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$ , dann (und nur dann) konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Eine weitere wichtige Familie bildet die **Riemann'sche Zetafunktion**:

Sei  $s > 1$ , dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

wobei der Grenzwert nicht trivial ist. Für  $s \leq 1$  divergiert die Reihe. Der Spezialfall  $s = 1$  wird die **harmonische Reihe** genannt und bildet die Grenze (als divergierende Reihe).

Ebenfalls extrem wichtig ist die **binomische Reihe** aus dem binomischen Lehrsatz:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

### 3.2.2 Konvergenzkriterien

Wie bereits erwähnt ist dies keine Vollständige Aufzählung aller Konvergenzkriterien. Ausserdem kann es gut sein, dass einige Kriterien in der Vorlesung andere Namen hatten, lasst euch davon nicht beirren. Ich habe des Weiteren das Grenzwertkriterium (bei euch hiess es glaube ich Vergleichskriterium II) weggelassen, da es sich dabei nur um eine Variante des Majoranten-/Minorantenkriterium handelt.

#### 1. Nullfolge-Kriterium:

Falls die Summanden  $a_n$  keine Nullfolge bilden, also deren Grenzwert nicht gegen null geht, so divergiert die Reihe immer. (Umgekehrt gilt dies aber nicht; die Summanden der harmonischen Reihe bilden eine Nullfolge obwohl die Reihe selbst divergiert).

#### 2. Leibniz-Kriterium:

Falls  $a_n$  die Elemente einer **monoton fallenden Nullfolge** bilden, dann konvergiert die zugehörige alternierend Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Beispielsweise konvergiert die alternierende harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ .

### Übung 3, Prüfung Sommer 2016:

Man untersuche die folgende Reihe auf Konvergenz und Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n + \log(n)}}$$

Wir vermuten wegen der alternierenden Form, dass das Leibniz-Kriterium angewendet werden könnte. Dafür müssen wir zeigen, dass für  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n + \log(n)}}$

a)  $a_n$  eine Nullfolge ist:

b)  $a_n$  monoton fällt, also  $a_{n+1} \leq a_n$ , und eine Nullfolge ist, also  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ :

### 3. Majoranten-Kriterium

Sei  $\sum_n b_n$  eine bekannte **absolut** konvergente Reihe und  $a_n$  die Elemente einer Folge mit  $|a_n| \leq |b_n|, \forall n$ , dann konvergiert auch die Reihe  $\sum_n a_n$  **absolut**.

#### Beispiel 6:

Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{u^n + b}$  konvergiert mindestens für alle  $|u| > 1$  und  $b > 0$ , denn wir haben  $\frac{1}{u^n + b} \leq \frac{1}{u^n} = \left(\frac{1}{u}\right)^n$  mit  $\frac{1}{u} < 1$ . Dies sind die Glieder einer konvergenten geometrischen Reihe und wir haben

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{u^n + b} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u^n + b} \leq 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{u^n} = 4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{u}}.$$

### 4. Minoranten-Kriterium

Sei  $\sum_n b_n$  eine bekannte divergente Reihe und  $a_n$  die Elemente einer Folge mit  $a_n \geq b_n, \forall n$ , dann divergiert auch die Reihe  $\sum_n a_n$ . Achtung: Passt bei alternierenden Reihen auf, da müsst ihr eine passende divergente alternierende Reihe finden und Divergenz zu zeigen!

### 5. Wurzel-Kriterium

Sei  $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , dann konvergiert die Reihe absolut für  $L < 1$  und divergiert für  $L > 1$ . Für  $L = 1$  kann keine Aussage gemacht werden.

Bemerkung: Falls eine Reihe absolut konvergiert, das heißt,  $\sum_n |a_n| < \infty$ , dann konvergiert die Reihe selbst auch, denn es gilt  $\sum_n a_n \leq \sum_n |a_n|$ . Des Weiteren dürfen Summanden nur von absolut konvergierenden Reihen bedenkenlos vertauscht werden (Umordnungssatz von Reihen). Zum Beispiel können Umordnungen der alternierenden harmonischen Reihe gefunden werden welche divergieren, obwohl die Reihe selbst konvergieren würde. Des Weiteren sei angemerkt, dass das Wurzelkriterium zwar etwas komplexer als das Quotientenkriterium ist, es aber mehr Anwendungen wegen des limes supremum hat. Haben wir beispielsweise eine Reihe mit vielen fehlenden Gliedern (Beispiel weiter unten Prüfung 2017 2.), dann können wir das Quotientenkrit. nicht anwenden, das Wurzelkriterium jedoch schon. Ausserdem muss euch bewusst sein, dass falls das Wurzel- oder Quotientenkrit. keine Aussage machen kann ( $L$  bzw.  $q = 1$ ) so wird das andere Kriterium **dasselbe liefern!** Dann müsst ihr also etwas anderes probieren.

#### Übung 4, Prüfung Sommer 2016:

Man untersuche die folgende Reihe auf Konvergenz und Divergenz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(2)^n}{2n + \frac{3}{2}}$$

Wegen dem  $n$ -te Potenz-Term  $\log(2)^n$  bietet sich das Wurzel-Kriterium an. Wir definieren  $a_n = \frac{\log(2)^n}{2n + \frac{3}{2}}$ , bemerken  $|a_n| = a_n$  und berechnen:

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dots$$

### 6. Quotienten-Kriterium

Sei  $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ , dann konvergiert die Reihe absolut für  $q < 1$  und divergiert für  $q > 1$ . Für  $q = 1$  kann keine Aussage gemacht werden.

#### Übung 5, Prüfung, Winter 2017:

Man untersuche die folgende Reihe auf Konvergenz und Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Diese Aufgabe ist sowohl mit dem Wurzel- als auch dem Quotienten-Kriterium schnell gelöst.

Wurzel-Kriterium:

L=

Quotienten-Kriterium:

q=

### 3.2.3 Potenzreihe

Eine Potenzreihe hat die Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

In der komplexen Analysis wird der Fall  $z \in \mathbb{C}$  intensiv behandelt, sowie der Fall mit negativen  $n$  (Laurent-Reihe). Falls die Reihe konvergiert, hat  $f(z)$  einen definierten Wert den man einfach finden kann.

Bemerkung: Für  $z = 1$  haben wir den bereits untersuchten Fall  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Falls also diese Reihe konvergiert, dann konvergiert auch die zugehörige Potenzreihe für alle  $|z| \leq 1$  (Majoranten-Kriterium).

- **Konvergenzradius**

Sei  $R \in \mathbb{R}^+$  der Konvergenzradius einer Potenzreihe, dann konvergiert die Potenzreihe für alle  $|z| < R$  absolut und divergiert für alle  $|z| > R$ .

Für eine gegebene Potenzreihe findet man den Konvergenzradius entweder über das Wurzel-Kriterium mit  $R = 1/L$  oder das Quotienten-Kriterium mit  $R = 1/q$ .

Der Fall  $|z| = R$  muss immer speziell untersucht werden! Zum Beispiel haben folgende drei Potenzreihen alle den selben Konvergenzradius  $R = 1$  doch konvergiert nur die letzte Reihe für  $x = 1$ :

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$
2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ , (harmonische Reihe für  $x = 1$ )
3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

Diese gesonderte Betrachtung der Punkte **auf** dem Konvergenzradius geht oftmals vergessen und führt zu Fehlern, also denkt unbedingt daran!

**Übung 6, Prüfung, Sommer 2017:**

1. Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die folgende Potenzreihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n} x^n$$

**Hinweis:** Vergessen Sie nicht die Randpunkte zu diskutieren.

2. Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die folgende Potenzreihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$$

**Hinweis:** Vergessen Sie nicht die Randpunkte zu diskutieren.

- **Cauchy-Produkt**

Konvergieren  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$  und  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$  im Punkt  $z$  absolut, so gilt

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

- **Identitätssatz**

Haben  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$  und  $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$  die Konvergenzradien  $R_f$  bzw.  $R_g$ , dann folgt aus  $f(z) = g(z), |z| < \min\{R_f, R_g\}$ , dass auch die Reihen identisch sind, das heisst

$$a_n = b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Bemerkung:** Ich weiss nicht, ob ihr diese beiden Konstrukte überhaupt behandelt habt, wegen ihrer Relevanz wollte ich sie aber erwähnt haben.



• **Ein paar Tricks**

1. **Ableitungen** sind lineare Operatoren, das heisst, man kann sie unter die Summe ziehen.

**Beispiel:**

Es gilt  $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$  mit  $R = \infty$ . Wie können wir daraus die Potenzreihe für  $\cos(z)$  herleiten?

Wir finden

$$\cos(z) = \frac{d}{dz} \sin(z) = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Für die Ableitung unter der Summe erhalten wir

$$\frac{d}{dz} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2n+1) z^{2n} = \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n}$$

und folgern  $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n}$

2. **Potenzen von Summen**

Es gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Dies ist die allgemeinere binomische Reihe.

3. **Indexverschiebungen**

Wir betrachten  $\sum_{n=l_1}^{l_2} a_{n+L}$  und substituieren  $s = n+L$ . Wie bei den Integral-Substitutionen müssen wir die Grenzen mitsubstituieren und erhalten  $s(l_1) = l_1 + L$  und  $s(l_2) = l_2 + L$ . Die substituierte Summe wird zu

$$\sum_{n=l_1}^{l_2} a_{n+L} = \sum_{s=l_1+L}^{l_2+L} a_s$$

### 3.2.4 Taylorreihe

Die Taylorreihe kann als eine leichte 'Verallgemeinerung' der Potenzreihe angesehen werden. Man nehme dafür eine konvergierende Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

und substituiere  $x \rightarrow x - x_0$ . Man erhält die neue Funktion  $g(x)$  welche um  $x_0$  in  $x$ -Richtung verschoben ist:

$$g(x) = f(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Diese Form ist äquivalent mit der **Definition der Taylorreihe** einer Funktion  $g(x)$  ausgewertet im Punkt  $x_0$ :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Wir sehen, dass dies für  $x_0 = 0$  gerade der Potenzreihe für  $g(x)$  entspricht. Der Vorteil der Taylorreihe ist, dass man für eine gegebene glatte (unendlich oft differenzierbare) Funktion direkt die Potenzreihe hinschreiben kann. Dasselbe gilt natürlich auch umgekehrt, werdet ihr nach der Taylorreihe einer Funktion gefragt, von welcher ihr die Potenzreihendarstellung kennt, so habt ihr das Resultat schon! Es ist leicht einzusehen, dass eine endliche Taylorreihe, genannt ein **Taylorpolynom**, für genügend kleines  $|x - x_0|$  bereits eine sehr gute Approximation für  $g(x)$  ist. Sei

$$T_n g(x; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

das Taylorpolynom  $n$ -ter Ordnung von  $g(x)$  ausgewertet an der Stelle  $x_0$ . Man kann zeigen, dass für den Fehler  $R(x) = g(x) - T_n g(x; x_0)$  gilt:

$$R(x) = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

für ein unbekanntes  $\xi \in [x_0, x]$ .

In Prüfungen kann es sehr gut sein, dass eine Aufgabe zur Taylorreihe und insbesondere zum Fehler eines Taylorpolynoms drankommt. Ich empfehle euch stark, die Taylorreihenentwicklung (bzw. die Potenzreihen) der bekanntesten Funktionen auf die Zusammenfassung zu schreiben, da ihr somit viel Zeit spart und unnötige Fehler vermeidet.

### **Übung 7, Prüfung Sommer 2016:**

Beweisen Sie, dass, wenn man  $\sqrt{e}$  mit einem Taylorpolynom dritten Grades um die Entwicklungsstelle  $x_0 = 0$  approximiert, der dabei entstehende Fehler kleiner als  $4^{-3}$  ist.

## 4 Grenzwerte von Funktionen

Wir interessieren uns für den Grenzwert (falls dieser existiert) einer bestimmten Funktion  $f(x)$ , also

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Für den Limes gelten die selben Regeln wie bei der Anwendung auf Folgen: Falls die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existieren, gelten deshalb folgende Regeln (in Zusammenfassung):

- $\lim_{x \rightarrow a} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 \lim_{x \rightarrow a} f(x) + c_2 \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , für alle  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  falls  $\lim_{x \rightarrow a} (g(x)) \neq 0$

Es ist ratsam als erstes die Funktion direkt in dem gefragten Punkt auszuwerten, also  $f(a)$ , um zu sehen, was genau das Problem ist. Falls wir Glück haben (wird an der Prüfung zwar sowieso nicht der Fall sein), kriegen wir direkt einen Wert für  $f(a)$ . Typischerweise kriegen wir aber Ausdrücke der Form:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty.$$

### 4.1 Methoden

Viele Methoden können von der Grenzwertbetrachtung bei Folgen übernommen werden:

#### 1. Brüche

Wie bei den Folgen kann man versuchen durch die grösste Potenz zu teilen, falls man den Limes von  $x \rightarrow \infty$  untersucht. Für den Limes  $x \rightarrow 0$  kann durch die kleinste Potenz geteilt werden. Dieses Verfahren beschränkt sich jedoch nicht nur auf Potenzen, sondern kann allgemein auf **Funktionen** angewandt werden. Die meist genutzten Dominanzen für  $x \rightarrow \infty$  lauten:

$$\log(\log(\dots)) \leq \log(x) \leq x^p \ (p > 0) \leq p^x \ (|p| > 1) \leq x! \leq x^x$$

Teilt auch hier durch die „grösste“ Funktion und zieht die Grenzwerte. (Für  $x \rightarrow 0$  müsst ihr mit den  $\log(\cdot)$  aufpassen!)

#### Beispiel 7:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 7}{2x^2 + 3} = \frac{7}{3}$$

**Übung 8, Prüfung Winter 2017:**

Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}$$

Bemerkung: Weshalb ist hier die Umformung  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x^2-4}$  nicht nützlich?

**Übung 9, Prüfung Winter 2017:**

Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

## 2. Potenzreihe

Hat man eine Funktion der Form  $f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ , so kann man für  $g_1(x)$  und  $g_2(x)$  deren Potenzreihen einsetzen und versuchen den Resultierenden Bruch zum Beispiel mit Methode 1. zu bearbeiten.

### Übung 10, Prüfung Winter 2017:

Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

Lösen Sie diese Aufgabe ohne Verwendung des Satzes von L'Hopital!

## 3. De-L'Hôpital

Diese Methode ist geeignet für Grenzwertrechnungen von Funktionen der Form  $f(x) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ . Für einen gegebenen Fall  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , für den durch simples Einsetzen von  $a$  in die Funktion, also  $f(a)$ , einen unbestimmten Ausdruck herauskommt ( $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$ ) gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1'(x)}{g_2'(x)}$$

Falls der Funktionswert durch simples Einsetzen noch immer einen unbestimmten Wert ergibt, kann De-L'Hôpital erneut angewendet werden. Es kann sein, dass dieses Verfahren rekursiv  $n$ -mal angewendet werden muss. Typischerweise muss man an der Prüfung die Funktion  $f(x)$  umformen, um auf einen Ausdruck der Form  $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$  zu kommen (Sprich man hat anfänglich einen Ausdruck  $0 \cdot \infty$ ).

**Übung 11:**

Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

Benutzen Sie die Methode von L'Hôpital.

**4. Die 'exp-log'-Methode**

Diese Methode kann angewendet werden auf Funktionen der Form  $f(x) = g(x)^{h(x)}$ . Man benutzt nun die Umformung  $g(x)^{h(x)} = \exp(\log(g(x)^{h(x)})) = \exp(h(x) \log(g(x)))$  und die Stetigkeit der Exponentialfunktion. Wir können deshalb schreiben:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x)^{h(x)} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow a} h(x) \log(g(x))\right), \quad g(x) > 0$$

Solange also in der Umgebung von  $x = a$  auch  $g(x) > 0$  gilt, haben wir das Problem umgeformt von einer Grenzwertberechnung der Form  $g(x)^{h(x)}$  zu  $h(x) \log(g(x))$ .

**Beispiel 8:**

Berechnen Sie folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \sin(x))^{\frac{1}{x}}$$

Durch direktes Einsetzen erhalten wir einen Ausdruck der Form  $1^\infty$ . Dieser Ausdruck ist nicht definiert (ist also nicht gleich eins), da die Basis immer leicht grösser ist als 1 für beliebig kleine  $x > 0$ . Falls die Basis konstant gleich eins wäre, würde tatsächlich gelten  $\lim_{x \rightarrow 0} 1^{\frac{1}{x}} = 1$ . Wir wenden nun unsere exp-log-Methode an:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \sin(x))^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + 3 \sin(x))}{x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 \cos(x)}{1 + 3 \sin(x)}}{1}\right) \quad (\text{Hopital}) \\ &= \exp(3) \end{aligned}$$

**Beispiel 9:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

## 5. Substitution

Vor allem bei einseitigen Grenzwerten

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

können wir auch versuchen, eine Substitution  $u(x)$  zu machen. Hierfür substituieren wir die Funktion  $f(x) \rightarrow g(u)$ . Die Grenze des Limes muss ebenfalls substituiert werden  $a \rightarrow u_0$ , wobei wir den substituierten Grenzwert  $u_0$  über den folgenden Grenzwert finden:

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0^+} u(x).$$

Unser substituiertes Grenzwertproblem hat nun folgende Form:

$$\lim_{u \rightarrow u_0} g(u).$$

## Übung 12:

Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log(x)$$

Benutzen Sie die Substitution  $u(x) = -\log(x)$ .

### Übung 13, Prüfung Sommer 2013:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{e^{-\frac{1}{x}}}$$

## 5 Kurvendiskussion

In diesem Abschnitt diskutieren wir ein paar wichtige Eigenschaften von Funktionen (mit einer Variablen).

### 5.1 Stetigkeit

Definition:

Eine Funktion  $f(x)$  heißt stetig im Punkt  $x_0$ , wenn in einer fixen Umgebung der Abstand der Funktionswerte  $|f(x) - f(x_0)|$  beliebig klein gemacht werden kann (kleiner als jedes  $\epsilon > 0$ ) in einer fixen Umgebung  $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$  um  $x_0$ . Das heißt, für ein beliebig kleines  $\epsilon > 0$  sollte ein  $\delta > 0$  existieren, sodass gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}.$$

Ihr seht, dass für die punktweise Stetigkeit das  $\delta$  sowohl von  $\epsilon$  als auch von  $x$  &  $x_0$  abhängen kann!

**Regel:**

Addition/Subtraktion/Verkettung/Multiplikation von stetigen Funktionen sind auch Stetig oder auch „Komposition stetiger Funktionen ist wiederum stetig“.

Etwas genauer:

- Sind die Funktionen  $f$  und  $g$  stetig in  $x_0$ , dann ist auch die Funktion  $f \pm g$  und  $f \cdot g$  in  $x_0$  stetig. Ist zusätzlich  $g(x_0) \neq 0$ , dann ist auch die Funktion  $f/g$  in  $x_0$  stetig.
- Sind die Funktionen  $f$  stetig in  $x_0$  und  $g$  stetig in  $y_0 = f(x_0)$ , dann ist auch die Verkettung  $g \circ f$  in  $x_0$  stetig.



### 5.1.1 Lipschitz-stetig

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heisst Lipschitz-stetig auf  $D \subset \mathbb{R}$ , wenn es eine (positive) Konstante  $L$  gibt so, dass für alle  $x, y \in D$  gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der Absolutbetrag aller Sekanten-Steigungen (insbesondere die Steigung von  $f$  selbst, falls sie differenzierbar ist) immer kleiner-gleich  $L$  ist.

Jede Lipschitz-stetige Funktion ist immer auch stetig.

Falls an der Prüfung ein Lipschitz-Stetigkeits-Beweis gemacht werden soll, ist es zwar gut, eine Intuition für Lipschitz-stetigkeit zu haben, jedoch muss man für den formalen Beweis etwas geübt sein mit typischen Ungleichungen und Abschätzungen. Zuerst würde ich vorschlagen zu prüfen, ob  $f$  überhaupt stetig ist, denn falls nicht, kann sie niemals Lipschitz-stetig sein. Als nächstes versucht eine Ungleichungskette folgender Form zu basteln:

$$|f(x) - f(y)| \leq \dots \leq L|x - y|.$$

Falls dies gelingt für ein  $L < \infty$ , ist die Funktion Lipschitz-stetig. Falls der Ausdruck  $|f(x) - f(y)|$  nicht beschränkbar ist, also gegen unendlich geht, ist  $f$  nicht Lipschitz-stetig. Falls die Funktion differenzierbar ist, gilt:

$$L = \max_x |f'(x)|$$

#### Beispiel 10:

Ist  $f(x) = ax + b$  Lipschitz-stetig auf  $\mathbb{R}$ ?

Intuition:  $f$  ist eine Gerade mit Steigung  $a$ . Alle Sekanten haben auch die Steigung  $a$ . Demnach sollte  $L = |a|$  sein.

Stetigkeit: Offensichtlich ist  $f$  überall differenzierbar, also muss  $f$  weiter auf Lipschitz-stetigkeit untersucht werden.

Ungleichungskette:

$$|f(x) - f(y)| = |ax + b - (ay + b)| = |a(x - y)| = |a||x - y|$$

$f$  ist demnach wie vermutet Lipschitz-stetig mit  $L = |a|$ .

Mit unserer gewonnenen Intuition können wir folgende Aufgaben innerhalb von Sekunden Lösen:

1.  $f(x) = x^2$  auf  $[0, 1]$   
 $f$  ist differenzierbar mit maximaler Steigung  $|f'(1)| = 2$ . Demnach ist  $f$  **lokal** Lipschitz-stetig mit  $L = 2$ .
2.  $f(x) = x^2$  auf  $\mathbb{R}$   
 $f$  ist zwar auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar, jedoch ist die Steigung nicht beschränkt, denn  $|\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x)| = |\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x| = \infty$ . Also ist  $f$  nicht Lipschitz-stetig.

3.  $f(x) = \sqrt{x}$  auf  $[0, \infty]$   
 $f$  ist zwar differenzierbar auf ganz  $[0, \infty]$  doch die Ableitung ist für  $x \rightarrow 0$  wieder nicht Beschränkt, denn  $|\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)| = |\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x}}| = \infty$ . Also ist  $f$  nicht Lipschitz-stetig.
4.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  auf  $\mathbb{R}$   
 $f$  ist im Punkt  $x = 0$  offensichtlich nicht stetig, also kann  $f$  auf keinen Fall Lipschitz-stetig sein.

### 5.1.2 Überprüfen auf Stetigkeit

Eine typische Prüfungsaufgabe besteht darin, eine gegebene Funktion  $f(x)$  auf Stetigkeit zu überprüfen. Oft beinhaltet die Funktion Parameter, welche so gewählt werden müssen, dass die Funktion stetig wird. Eine Funktion könnte zum Beispiel so gegeben sein:

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & x \leq a \\ g_2(x) & x > a \end{cases}$$

Nun müssen die Teilfunktionen  $g_1$  und  $g_2$  auf Stetigkeit überprüft werden, sowie deren Grenzwert bei  $x = a$ . Dort fordert die Stetigkeitsbedingung:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g_2(x)$$

Mein grösster Tipp ist, dass ihr, falls möglich, die Funktion immer kurz zu skizzieren versucht. Einfach um eine Intuition zu bekommen, was ihr eigentlich gerade versucht zu zeigen: Ist die Funktion intuitiv stetig? Oder ist sie eindeutig unstetig?

#### Übung 14, Prüfung Sommer 2016:

Bestimmen Sie die Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  so, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) + \alpha & x \geq 0 \\ (\beta + \alpha + 1)x^7 & x < 0 \end{cases}$$

stetig ist auf ganz  $\mathbb{R}$ .

### Übung 15:

Die Funktion  $f(x) = \frac{3 \sin(x)}{x}$  sei gegeben auf dem Gebiet  $\mathbb{R}^+$ . Erweitern Sie die Funktion **stetig** auf das Gebiet  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ . Mit anderen Worten, wählen Sie den Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$  so, dass die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

## 5.2 Differenzierbarkeit

Die **Ableitungsregeln** von Funktionen sollten für alle bereits geläufig sein. Ich gehe deshalb nicht weiter darauf ein.

Des weiteren überlasse ich das Thema von **Extremwertuntersuchungen** dem Analysis II Kurs, da dieser das Problem allgemeiner für Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen, behandelt.

Eine typische Prüfungsaufgabe zur Differenzierbarkeit beinhaltet die Untersuchung einer Funktion  $f(x)$  auf spezielle Punkte ihrer Ableitung  $f'(x)$ . Dabei sind folgendes zu beachten:

- $f(x)$  ist differenzierbar in  $x_0$ , wenn dort die Ableitung  $f'(x_0)$  existiert. Diese müsst ihr dann meistens auch wirklich über die Definition

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

berechnen.

- Andererseits ist  $f(x)$  sogar stetig differenzierbar in  $x_0$ , falls  $f'(x)$  stetig in  $x_0$  fortsetzbar ist.
- Falls  $f(x)$  in  $x_0$  nicht stetig ist, so ist sie in  $x_0$  auch nicht differenzierbar.
- Falls ihr die Ableitung der Umkehrfunktion wisst, so könnt ihr die Ableitung der Funktion über folgenden einfachen Zusammenhang finden:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

**Beispiel 11:**

Die Funktion  $f(x) = |x|$  besitzt die Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases},$$

wobei die Ableitung in  $x = 0$  nicht definiert ist. Falls  $f(x)$  stetig differenzierbar wäre, so müsste man  $f'(x)$  stetig in  $x = 0$  fortsetzen können, das heisst, man müsste  $f'(0)$  so definieren können, dass  $f'(0^-) = f'(0^+) = f'(0)$ . Dies ist offensichtlich nicht möglich, da  $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$ .

**Übung 16, Prüfung Sommer 2017:**

Gegeben sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. Ist  $f(x)$  stetig?
2. Ist  $f(x)$  differenzierbar?
3. Ist  $f(x)$  stetig differenzierbar?

## 6 Integralrechnung

An der Prüfung solltet ihr eine **Tabelle mit den Grundintegralen** mitnehmen. Grundsätzlich werden an der Prüfung jedoch Integrale gefragt, bei denen eine bestimmte **Integrationsmethode** verwendet werden sollte. Dabei gibt die Lösung ohne Lösungsweg normalerweise keine Punkte.

### 6.1 Grundlagen

Für eine Funktion  $f(x)$  wird beim Integrieren deren **Stammfunktion**  $F(x)$  gesucht so, dass  $F'(x) = f(x)$ . Beachte, dass  $F(x)$  eindeutig bis auf eine additive Konstante ist, das heisst, für alle  $c \in \mathbb{R}$  ist  $G(x) = F(x) + c$  auch eine Stammfunktion von  $f(x)$ , denn es gilt  $G'(x) = F'(x)$ . Wir beschreiben diesen Zusammenhang mit dem Integral-Symbol ohne Integrationsgrenzen (unbestimmtes Integral):

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

Vergesst bitte nie das  $+c$  bei unbestimmten Integralen. Es kostet euch einen Punkt an der Prüfung!

Eine besonders wichtige Eigenschaft des Integrals ist die **Linearität**:

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

Für bestimmte Integrale gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

falls die Stammfunktion existiert. Dabei entspricht der Wert  $F(b) - F(a)$  geometrisch der Fläche, welche zwischen der  $x$ -Achse und der Funktion  $f(x)$  auf dem Intervall  $[a, b]$  eingeschlossen wird. Beachte, dass Flächenanteile negativ sind im Bereichen, bei welchen  $f(x) < 0$  gilt. Ist in einer Aufgabe also die Fläche der Funktion gefragt, so müsst ihr noch die Nullstellen berechnen (Fläche zwischen 2 Funktionen dann die Schnittpunkte).

Für die Integrationsgrenzen gilt **Additivität**:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Ausserdem gilt:

$$\int_a^a f(x) dx = 0,$$

falls  $f(a)$  definiert ist und

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Wegen der Additivität der Integralgrenzen kann für **stückweise stetige** Funktionen der Form ( $g_1, g_2$  stetig)

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & x < b \\ g_2(x) & x > b \end{cases}$$

folgende Zerlegung gemacht werden:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b g_1(x) dx + \int_b^c g_2(x) dx$$

## 6.2 Riemannsche Summen

Die Riemannsche ist eine Approximation für die Fläche zwischen der Kurve  $f(x)$  und der  $x$ -Achse. In ihrer Normalform summiert sie über den Bereich  $x \in [0, 1]$ . Eigentlich Teil der Herleitung des Riemann-Integrals, ermöglicht sie uns in gewissen Fällen auch die Berechnung des exakten Wertes einer Reihe.

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Hier gilt es  $\frac{1}{n}$  als Breite der Intervalle und  $\frac{k}{n}$  als unser  $x$  zu interpretieren. Die Breite unserer Intervalle muss nicht unbedingt immer gleich breit bleiben (wird es aber meistens), sie muss aber für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 streben. Auch muss  $x$  nicht immer im Intervall 0 bis 1 liegen, das liegt an dem Verhältnis von  $k$  und  $n$  in der Summe.

**Beispiel 12:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{4k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{4k}{n} = \int_0^1 4x dx = 2x^2 \Big|_0^1 = 2$$

**Übung 17:** Berechnen Sie folgende Riemannsche Summe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (akn + bn^2)^{-1/2}$$

### 6.3 Partielle Integration

Seien  $f$  und  $g$  differenzierbare und integrable Funktionen. Dann gilt mit der Produktregel:

$$(g(x)f(x))' = g'(x)f(x) + f'(x)g(x)$$

$$g'(x)f(x) = (g(x)f(x))' - f'(x)g(x)$$

Beidseitiges Integrieren ergibt die partielle Integrationsformel:

$$\int_a^b g'(x)f(x) dx = g(x)f(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Diese Methode ist demnach geeignet um Funktionen der Form  $f(x) = u(x)v(x)$  zu integrieren, wobei  $u(x)$  einfach zu integrieren ist und die Ableitung  $v'(x)$  einfacher wird so. Manchmal muss man mehrmals hintereinander Partiiell integrieren.

**Beispiel 13:** Wir wollen folgendes Integral berechnen:

$$\int_a^b xe^x dx$$

Wir identifizieren  $u(x) = e^x$  und  $v(x) = x$ , denn wir wissen wie wir  $e^x$  integrieren und die Ableitung von  $v(x) = x$  ist trivial. Wir erhalten:

$$\int_a^b xe^x dx = xe^x\Big|_a^b - \int_a^b 1 \cdot e^x dx = xe^x\Big|_a^b - e^x\Big|_a^b = be^b - ae^a - (e^b - e^a)$$

Manchmal besteht der Trick darin, sich eine zweite Funktion vorzustellen:

**Übung 18:**

$$\int_a^b \log(x) dx = \int_a^b 1 \cdot \log(x) dx = \dots$$

Für welche Werte  $b > a$  ist das Integral definiert?

### Übung 19, Prüfung Sommer 2016:

Berechnen Sie folgendes Integral

$$\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx$$

## 6.4 Substitution

Die Substitution der Variablen einer Funktion ist uns bereits mehr oder weniger geläufig. Für eine gegebene Funktion  $f(x)$  ersetzt man  $x \rightarrow u(x)$  durch eine neue Variable  $u(x)$ , die von  $x$  abhängt so, dass die substituierte Funktion  $g(u) = g(u(x)) = f(x)$  nur noch von  $u$  abhängig ist. Das klassische Beispiel dafür sind Gleichungen der Form

$$0 = f(x) = ax^4 + bx^2 + c.$$

Es ist nicht einfach Nullstellen von Polynomen vierter Ordnung zu finden. Wir substituieren  $u(x) = x^2$  und erhalten

$$0 = g(u) = au^2 + bu + c.$$

Dies ist ein Binom in  $u$ , das wir mit der berühmten Mitternachtsformel lösen können. Wir erhalten zwei Lösungen  $u_1, u_2$ . Nun machen wir die Rücksubstitution  $x^2 = u$  und erhalten so die vier Lösungen in  $x$ .



### 6.4.1 Bestimmtes Integral

Die Substitution eines bestimmten Integrals erfordert nicht nur die Substitution des **Integranden** sondern immer auch des **Linielementes** (für mehrdimensionale Integrale das Flächen/Volumen-Element) und der **Integrationsgrenzen**.

- **Integrand:**  $f(x) \rightarrow g(u)$

- **Linielement:**  $dx \rightarrow \frac{du}{u'(x)}$

Hier haben wir das Problem, das  $u'(x)$  im Allgemeinen immer noch von  $x$  abhängig ist. Deshalb funktioniert eine Substitution nur in speziellen Fällen. Wenn man Glück hat, kann man  $u'(x)$  selbst auch mit Hilfe von  $u(x)$  schreiben. Für die **affine Transformation**  $u(x) = ax + b \rightarrow u'(x) = a$  haben wir dieses Problem nicht!

- **Integrationsgrenzen:**  $a \rightarrow u(a)$ ,  $b \rightarrow u(b)$

Beachte hier, falls die Integrationsgrenzen unendlich sind (uneigentliche Integrale), typischerweise die Integrationsgrenzen unendlich bleiben, jedoch das Vorzeichen wechseln kann. Sei zum Beispiel  $u(x) = -x^2$  und  $a = \infty$ , dann ist  $u(a) = u(\infty) = -\infty^2 = -\infty$ .

Das substituierte Integral schreibt sich also allgemein:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \frac{g(u)}{u'(x)} du$$

#### Übung 20:

Man löse

$$\int_1^2 \log(4x - 1) dx$$

### Übung 21, Prüfung Sommer 2016:

Berechnen Sie die folgendes Integral:

$$\int_1^2 x^{-3} \arctan(x^{-1}) dx$$

Auf eurer Integraltabelle solltet ihr finden:

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x) + c$$

#### 6.4.2 Unbestimmtes Integral

Wenn wir ein unbestimmtes Integral substituieren wollen, können wir offensichtlich die Grenzen nicht substituieren. Um die Stammfunktion zu finden, substituieren wir deshalb nur den Integranden und das Linienelement. Nach dem wir das Integral gelöst haben, können wir **rücksostituieren**, also für  $u$  wieder den Ausdruck für  $x$  also  $u(x)$  einsetzen.

**Übung 22:**

$$\int x \log(2 + x^2) dx$$

### 6.4.3 Standardsubstitutionen

Es gibt viele Standardsubstitutionen. Ich will hier nur folgende wichtige Substitution festhalten. Viele hilfreiche Ansätze findet ihr im Königsberger auf Seite 209. Generell sind diese Integrale aber die schwerste Art, und das einzige was wirklich hilft ist viel Übung, bis ihr ein Gefühl dafür bekommt. Wir betrachten zuerst das Integral der Form

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx.$$

Mit der Substitution  $u(x) = g(x) \rightarrow u'(x) = g'(x)$  erhalten wir:

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{u'(x)}{u} \frac{du}{u'(x)} = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{u} du = \ln |u| \Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

**Beispiel 14:**

$$\int_0^{\pi/4} \frac{2 \sin(x)}{\cos(x)} dx = \int_0^{\pi/4} (-2) \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int_{\cos(0)}^{\cos(\pi/4)} (-2) \frac{1}{u} du = -2 \ln |u| \Big|_1^{\sqrt{2}/2} = \ln(2)$$

Die Verallgemeinerung dieser Standardsubstitution ist nun offensichtlich. Für ein Integral folgender Form

$$\int g'(x) \cdot f(g(x)) dx,$$

können wir die vereinfachende Substitution  $u(x) = g(x)$  machen so, dass gilt:

$$\int g'(x) f(g(x)) dx = \int u'(x) f(u) \frac{du}{u'(x)} = \int f(u) du.$$

Falls wir also die Stammfunktion von  $f$  finden können, können wir auch immer die Stammfunktion von  $g'(x)f(g(x))$  finden für eine beliebige Funktion  $g$ .

**Übung 23:**

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

## 6.5 Integration rationaler Funktionen

Es wird fast sicher ein Integral einer rationalen Funktion an der Prüfung erscheinen, da es sowohl eure Integration wie auch Partialbruchzerlegung überprüft. Ausserdem führen viele Substitutionen (wie die erwähnten aus dem Königsberger) auf Integrale rationaler Funktionen zurück. Eine rationale Funktion hat die Form

$$f(x) = \frac{P_n}{P_m},$$

wobei  $P_n = a_n x^n + \dots + a_0$  ein Polynom mit reellen Koeffizienten  $n$ -ter Ordnung ist. Falls  $n \geq m$  können durch **Polynomdivision** die Hauptteile abgespalten werden so, dass gilt

$$f(x) = P_{n-m} + \frac{P_{m-1}}{P_m}.$$

Das Polynom  $P_{n-m}$  ist einfach integrierbar. Den gebrochenrationalen Term  $\frac{P_{m-1}}{P_m}$  können wir mit Hilfe einer **Partialbruchzerlegung** zerlegen und dann integrieren. Dabei erhalten wir folgende Bruchformen:

- $\frac{A}{(x-x_0)^k}$

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^k} dx = \int \frac{A}{u^k} du = \begin{cases} \frac{A}{(1-k)(x-x_0)^{k-1}} + C & k > 1 \\ A \ln |x-x_0| + C & k = 1 \end{cases}$$

- $\frac{cx+d}{x^2+2ax+b}$  mit  $b > a^2$  (Sprich komplexe Nullstellen)

Dieses Integral kann man mit mehreren Substitutionen lösen und erhält:

$$\int \frac{cx+d}{x^2+2ax+b} dx = \frac{c}{2} \log(|x^2+2ax+b|) + \frac{d-ac}{\sqrt{b-a^2}} \arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right) + C$$

Vergesst bitte die Betragsstriche beim Logarithmus nicht! Die Partialbruchzerlegung solltet ihr besonders gut üben. Sie wird euch durch das ganze Bachelor-Studium begleiten. Wir werden hier nicht näher darauf eingehen, da sie theoretisch nicht so schwer ist, sondern vor allem viel Übung benötigt. Beispiele dazu findet ihr wie immer im C.T.Michaels Analysis 1.

### Übung 24, Prüfung Winter 2017:

Berechnen Sie folgendes unbestimmtes Integral

$$\int \frac{9}{x^3 - 3x - 2} dx$$

Hinweis:  $-1$  ist eine doppelte Nullstelle des Nenners.

## 6.6 Uneigentliche Integrale

Bei uneigentlichen Integrale betrachtet man den Grenzwert hin zu den Integrationsgrenzen. Diese können also zum Beispiel auch unendlich sein oder auf eine Polstelle führen.

**Beispiel 15:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} \arctan(s) - \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan(t) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

**Übung 25:** Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int_0^1 x^{-s} dx$$

## 7 Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

ODE's sind Gleichungen von Funktionen  $y(x)$  mit einer Variabel, wobei auch Ableitungen der Funktionen vorkommen. Dabei möchte man diejenigen Funktionen  $y(x)$  finden, welche die Gleichung lösen. Eine ODE der Ordnung  $n$  hat allgemein die Form:

$$f(y^{(0)}(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x), x) = q(x),$$

wobei wir um Tinte zu sparen die Abhängigkeiten von  $x$  meistens nicht ausschreiben, also,  $y^{(2)}(x) = y^{(2)} = y''$ . Die allgemeine Lösung  $y(x)$  einer ODE  $n$ -ter Ordnung hat immer  $n$  Konstanten, die später durch  $n$  **Randbedingungen** bestimmt werden können. Es gibt auch hier wieder unzählige verschiedene Differentialgleichungstypen, wir beschränken uns auf einige der Wichtigsten, im Verlauf des Studiums werdet ihr noch mit anderen Typen in Kontakt kommen. Zuerst betrachten wir lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, welches der eindeutig einfachste Typ von Differentialgleichung ist. Anschliessend werden wir noch einige einfache Fälle von linearen Differentialgleichungen mit nicht-konstanten Koeffizienten betrachten, und auch eine Methode, welche bei nicht-linearen Differentialgleichungen klappen kann.

### 7.1 Lineare ODE mit konstanten Koeffizienten

Ein besonders einfacher aber sehr häufiger ODE-Typ besteht aus einer Linearkombination der Ableitungen:

$$a_0 y^{(0)} + \dots + a_n y^{(n)} = q.$$

Man nennt die linke Seite der Gleichung den **homogenen Teil** und die rechte Seite den **partikulären Teil**. Der Lösungsraum einer ODE wird durch die Kombination der **allgemeinen Lösung des homogenen Problems** und einer einzigen **partikulären Lösung des inhomogenen Problems** vollständig aufgespannt. Es gilt also

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

und man geht generell wie folgt vor:

1. Betrachte das homogene Problem  $\rightarrow y_h$
2. Finde eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems  $\rightarrow y_p$
3. Betrachte die gesamte Lösung, und, falls **Anfangswerte vorhanden sind (AWP)** löse das resultierende Gleichungssystem nach den unbekanntenen Konstanten auf.

#### 7.1.1 Homogene Lösung

Wir beginnen also mit dem homogenen Problem. Man setzt dafür  $q = 0$ :

$$a_0 y^{(0)} + \dots + a_n y^{(n)} = 0.$$

Weil diese Gleichung linear in den  $y^{(k)}$ -Glieder ist, gilt das **Superpositionsprinzip**. Das heisst, falls wir zwei Lösungsfunktionen,  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$ , herausgefunden haben, so sind auch deren Linearkombinationen  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  Lösungen der homogenen DGL.

**Lösungsverfahren:**

Einsetzen des Euler-Ansatzes  $y(x) = \exp(\lambda x)$  ergibt das **charakteristische Polynom**:

$$Chp(\lambda) = a_0 \lambda^0 + a_1 \lambda^1 \dots + a_n \lambda^n = 0$$

Das Lösen dieser Gleichung ergibt die **Eigenwerte**  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Für alle Eigenwerte  $\lambda_i$  ist die Funktion  $y_i(x) = \exp(\lambda_i x)$  eine Lösung der DGL.

Falls **mehrfache Eigenwerte** (mehrfache Nullstellen im charakteristische Polynom) vorliegen, existieren noch mehr (linear unabhängige) Lösungsfunktionen. Sei  $\lambda_j$  ein  $k$ -facher Eigenwert, dann sind die zugehörigen Lösungsfunktionen  $\exp(\lambda_j x), x \exp(\lambda_j x), \dots, x^{k-1} \exp(\lambda_j x)$ . Schliesslich haben wir **immer**  $n$  linear unabhängige Lösungsfunktionen.

Wegen dem Superpositionsprinzip ist dann die **allgemeine homogene Lösung**:

$$y_h = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x), \quad c_i \in \mathbb{C}$$

**Übung 26, Prüfung Winter 2017:** Finden Sie alle Lösungen der ODE:

$$y'' + y' - 6y = 50 \cos(x)$$

$$y(0) = 0$$

Wir suchen also zuerst die homogenen Lösungen für

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

### 7.1.2 Partikuläre Lösung

Der allgemeinen homogenen Lösung  $y_h(x)$  müssen wir nun eine **partikuläre Lösung**  $y_p(x)$  überlagern, welche die vollständige DGL löst, also:

$$a_0 y_p^{(0)} + \dots + a_n y_p^{(n)} = q$$

Im Allgemeinen ist es nicht so einfach eine partikuläre Lösung zu finden.

### 7.1.3 Ansatz vom Typ der rechten Seite

Dies ist meist der erste Ansatz welcher versucht werden sollte, da er meistens zum Ziel führt. Für folgende  $q(x)$  kann  $y_p(x)$  durch einen Ansatz berechnet werden:

$$q(x) = (b_0 + b_1 x^1 + \dots + b_m x^m) \exp(\mu x)$$

Über die Euleridentitäten sind auch rechte Seiten welche  $\cos$  oder  $\sin$  beinhalten mithilfe dieses Ansatzes lösbar. Hierbei sind die Parameter  $b_0, \dots, b_m, \mu \in \mathbb{R}$ . Der zugehörige Ansatz hängt davon ab, ob  $\mu$  zufällig auch eine Nullstelle ist des charakteristische Polynoms. Für  $m = 0$  gibt es eine geschlossene Formel, welche man auf die Zusammenfassung nehmen kann, man kann den Fall aber auch wie alle anderen Lösen (was ich persönlich preferiere).

Sei  $\mu$  eine  $k$ -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Dann ist der zugehörige Ansatz:

$$\begin{aligned} m > 0 : \quad & y_p(x) = (c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m) x^k \exp(\mu x) \\ m = 0 : \quad & y_p(x) = \frac{b_0}{Chp^{(k)}(\mu)} x^k \exp(\mu x), \end{aligned}$$

wobei  $Chp^{(k)}(\mu)$  die  $k$ -te Ableitung des charakteristischen Polynoms ist, ausgewertet an der Stelle  $\lambda = \mu$ . Wichtig, beinhaltet die rechte Seite einen  $\cos$  oder  $\sin$ , muss im Ansatz **immer** eine Linearkombination von  $\cos$  **und**  $\sin$  eingebaut werden!

#### Vorgehen:

1. Man identifiziert  $q(x)$  in der DGL und deren Parameter, also  $b_0, \dots, b_m, m, \mu$ .  
Bemerkung: Falls  $q(x)$  keine Exponentialfunktion enthält, liegt natürlich, wegen  $\exp(0 \cdot x) = 1$ , der Fall  $\lambda = 0$  vor.
2. Man schaut, ob der Fall  $m = 0$  oder  $m > 0$  vorliegt.
3. Man identifiziert  $k$ , das heisst, man schaut, ob  $Chp(\mu) = 0$  und welche Ordnung die Nullstelle hat.
4. (Optional) Falls  $m = 0$  berechnet man die  $k$ -te Ableitung des charakteristischen Polynoms und setzt  $\mu$  ein, also  $Chp^{(k)}(\mu)$ .
5. Nun kann der gefundene Ansatz für  $y_p(x)$  in die vollständige Differenzialgleichung eingesetzt werden und die unbekannt Koeffizienten können durch einen **Koeffizientenvergleich** gefunden werden.



Falls der partikuläre Teil in einer Linearkombination vorliegt, also

$$q(x) = c_1 q_1(x) + \dots + c_r q_r(x)$$

so muss das obige Verfahren für alle  $q_r(x)$  angewendet werden. Man erhält dann  $r$  Ansätze für die partikuläre Lösung  $y_{p,r}(x)$ , für jedes  $q_r(x)$  einen. Der gesuchte partikuläre Ansatz  $y_p$  für das totale  $q(x)$  berechnet sich dann (wegen der Linearität der DGL) zu:

$$y_p(x) = c_1 y_{p,1}(x) + \dots + c_r y_{p,r}(x)$$

Dann geht es normal mit Schritt 5 weiter.

### Übung 27, Königsberger 10.3:

$$y''' - y' = q$$

Wir haben das charakteristische Polynom

$$Chp(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = 0$$

mit den Nullstellen  $-1, 0, 1$ .

1.  $q(x) = \exp(2x)$

Die Parameter sind:  $m = 0, b_0 = 1, \mu = 2$ . Da  $\mu$  keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, haben wir  $k = 0$ . Der Ansatz ist deshalb:

$$\frac{b_0}{Chp^{(k)}(\mu)} x^k \exp(\mu x) = \frac{1}{2^3 - 2} x^0 \exp(2x) = \frac{1}{6} \exp(2x)$$

2.  $q(x) = \exp(x)$

3.  $q(x) = x^2$

**Übung 28, Prüfung Sommer 2016:**

$$2y'' + 3y' - y = e^x$$

$$y(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$$

**Übung 29:**

$$y''' - y = (x + 1)e^x$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$$

Falls unsere rechte Seite  $\cos$  oder  $\sin$  beinhaltet, gibt es noch eine andere Option als der oben erwähnte Ansatz, um eine partikuläre Lösung zu finden, und zwar, indem wir die DGL **komplexifizieren**. Dies bedeutet konkret, dass wir eine komplexwertige Funktion  $z_p(x)$  zulassen (bislange  $y_p(x)$ ) und ein komplexwertiges  $\mu$ . Wir erweitern dann unser  $q(x)$  zu einer komplexen Funktion  $Q(x)$  so, dass gilt  $q(x) = \operatorname{Re}(Q(x))$  oder  $q(x) = \operatorname{Im}(Q(x))$ .

Beispiele sind:

$$q(x) = \cos(x) = \operatorname{Re}(Q(x)), Q(x) = e^{ix}, (\mu = i)$$

$$q(x) = \sin(x) = \operatorname{Im}(Q(x)), Q(x) = e^{ix}, (\mu = i)$$

$$q(x) = (3x^2 + 1x^3)e^{-x} \cos(x) = \operatorname{Re}(Q(x)), Q(x) = (3x^2 + 1x^3)e^{-x}e^{ix}, (\mu = -1 + i)$$

Hat man  $Q(x)$  bestimmt, so findet man mit dem Rezept von oben die komplexwertige partikuläre Lösung  $z_p(x)$ . Am Ende erhalten wir, je nach dem, ob wir uns für den Realteil oder den Imaginärteil von  $Q(x)$  interessieren:  $y_p(x) = \operatorname{Re}(z_p(x))$  bzw.  $y_p(x) = \operatorname{Im}(z_p(x))$ .

**Übung 30, Königsberger 10.3:**

$$y''' - y' = \cos(x)$$

Bemerkung: Der homogene Teil ist der selbe wie bei der letzten Beispiel-Kette.

**Übung 31:**

$$y' + y = 2 \sin(x)$$

$$y(0) = \pi$$

**Übung 32:**

$$y'' - y' + y = x - e^x + \cos(x)$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

### 7.1.4 Methode der Variation der Konstanten

Die Methode der Variation der Konstanten kann für die Suche nach einer partikulären Lösung von linearen DGL angewendet werden. Man sollte sie vor allem dann anwenden, wenn man den Ansatz vom Typ der rechten Seite nicht machen kann.

Von der homogenen DGL der Ordnung  $n$  haben wir im Allgemeinen die Lösung in Form einer Linearkombination der  $n$  Basisfunktionen  $y_i(x)$ :

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$$

Für die Suche nach der partikulären Lösung lassen wir die Koeffizienten variieren. Wir nennen sie im folgenden  $u_i(x)$ . Sie sind gegeben über das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q \end{pmatrix}$$

#### Vorgehen

1. Man stellt das obige Gleichungssystem auf und löst es z.B. mit dem Gauss-Verfahren (sofern es nicht einfacher geht).
2. Hat man einmal die  $u_i'(x)$  gefunden, so müssen wir sie integrieren, um deren Stammfunktionen  $u_i(x)$  zu erhalten.
3. Die partikuläre Lösung ist dann gegeben durch

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) y_i(x).$$

Ich denke an der Prüfung wäre eine DGL, die für die Methode der Variation der Konstanten gedacht ist, von der Ordnung  $n = 1$  oder maximal  $n = 2$ . Das Gauss-Verfahren wird wohl nicht nötig sein. Vor allem für ODE's erster Ordnung ist die Methode ziemlich einfach, da man sich nichts mit der Matrix überlegen muss.

#### Übung 33, Königsberger 10.5:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}$$

**Übung 34:**

Finde die partikuläre Lösung je einmal mit Variation der Konstanten und Ansatz der rechten Seite.

$$y'' + 3y' + 2y = x$$

**Übung 35:**

$$y'' + y = \tan(x)$$

## 7.2 Separation der Variablen

Wir betrachten nun nicht mehr lineare ODE's mit konstanten Koeffizienten, folgende Methode ist vor allem bei linearen ODE's mit nicht-konstanten Koeffizienten oder aber auch bei einfachen nicht-linearen ODE's hilfreich, solange es ODE's erster Ordnung sind. Eine separierbare DGL lässt sich auf folgende Form bringen

$$y'(x)p(y(x)) = q(x),$$

wobei  $p$  eine Funktion von  $y$  ist und  $q$  (wie gehabt) eine Funktion von  $x$ . Wir setzen  $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ , multiplizieren wir auf beiden Seiten mit  $dx$  und integrieren (auf beiden Seiten):

$$\int p(y) dy = \int q(x) dx.$$

Falls wir die Integrale nicht lösen können, haben wir zumindest einen impliziten Ausdruck für die Lösungsfunktion  $y(x)$ . Dies ist ein unbestimmtes Integral. Vergesst deshalb nicht auf einer Seite eine Integrationskonstante einzuführen, falls ihr doch integrieren könnt.

**Übung 36 (linear, nicht-konstante Koeff.):**

$$y' + yx = 0$$

$$y(0) = -1$$

**Übung 37 (nicht-linear):**

$$y' = xy^2 + x$$

$$y(0) = 1$$

### 7.3 Eulersche Differentialgleichungen

Ein weiterer, einfacher Typ von linearen ODE's mit nicht-konstanten Koeffizienten sind die sogenannten eulerschen Differentialgleichungen. Sie sind von der typischen Form

$$c_1 x^n y^{(n)} + \dots + c_{n-1} x y' + c_n y = 0$$

Da ihr diesen Typ ziemlich ausführlich behandelt habt, kann es gut sein, dass eine solche Aufgabe kommt. Ihr habt 2 gleichwertige Möglichkeiten diesen Typ von ODE zu lösen, und zwar:

1. Substituiere  $x = e^t$ , leite das neue  $h(t) = y(e^t)$  ab und suche die ODE welche von diesem gelöst wird (dies wird nun eine lineare ODE mit konstanten Koeffizienten sein). Am Ende wieder zurück substituieren. Die Ableitungen von  $h(t)$  könnt ihr in die Zusammenfassung nehmen, das verhindert Fehler und spart Zeit.
2. Wir wählen anstatt des üblichen Euler-Ansatzes  $y = e^{\lambda x}$  den Ansatz  $y = x^\alpha$ . Dies führt auf ein neues, leicht anderes charakteristisches Polynom. Aber auch hier könnt ihr nach  $\alpha$  auflösen und die Lösung als Linearkombination der einzelnen  $x^\alpha$  Terme aufschreiben. Um anschliessend auf die übliche Form zu kommen (falls dies nötig sein sollte) benutzt ihr den  $e^{\log}$ -Trick, welcher aus der Reihenkonvergenzbetrachtung bekannt sein sollte. Dann habt ihr die typische  $e^{\lambda x}$  Form.

**Übung 38:** Lösen Sie die Differentialgleichung

$$x^2 y'' + 3xy' - 3y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 0$$

auf 2 verschiedene Arten:

- a) Mit der Substitution  $x = e^t$



b) Mit dem Ansatz  $y = x^\alpha$