Analysis II: Vorgelöste Aufgaben Extremalwerte unter Nebenbedingungen

---

Aufgabe 1 (Optimierung auf Untermannigfaltigkeit ohne Rand) Berechne das Minimum und Maximum der Funktion $f(x,y,z) = 4y - 2z$ unter den Nebenbedingungen $2x - y - z = 2$ und $x^2 + y^2 = 1$.

Lösung: Es empfiehlt sich, immer zunächst die Menge M zu skizzieren auf der extremiert werden soll, soweit möglich. In unserem Fall ist M der Schnitt eines Zylinders vom Radius 1 entlang der z-Achse ($\phi_1(x,y,z) = x^2 + y^2 = 1$) und einer Ebene mit Normalvektor $(2,-1,-1)$ ($\phi_2(x,y,z) = 2x - y - z = 2$). Also ist M eine Ellipse, insbesondere kompakt, so dass f als stetige Funktion auf M ein Maximum und ein Minimum annimmt. Zur Bestimmung derselben benutzen wir Lagrange-Multiplikatoren, d.h. wir müssen das folgende Gleichungssystem lösen

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \nabla\phi_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla\phi_2(x,y,z) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ x^2 + y^2 &= 1 \\ 2x - y - z &= 2 \end{aligned}$$

Wir finden aus der 3. Komponente der 1. Gleichung direkt $\lambda_2 = 2$. Die ersten beiden Komponenten werden damit zu

$$\lambda_1 x = -2 \qquad\qquad \lambda_1 y = 3$$

Insbesondere sind $\lambda_1, x, y \neq 0$ und $x = -\frac{2}{\lambda_1}$ und $y = \frac{3}{\lambda_1}$. Einsetzen in die 2. Gleichung oben ergibt dann

$$1 = x^2 + y^2 = \frac{1}{\lambda_1^2}(4+9)$$

also $\lambda_1 = \pm\sqrt{13}$, also $(x,y) = \pm(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$. Aus der 3. Gleichung oben erhalten wir dann

$$z = 2x - y - 2 = \pm\frac{-4-3}{\sqrt{13}} - 2 = \mp\frac{7}{\sqrt{13}} - 2$$

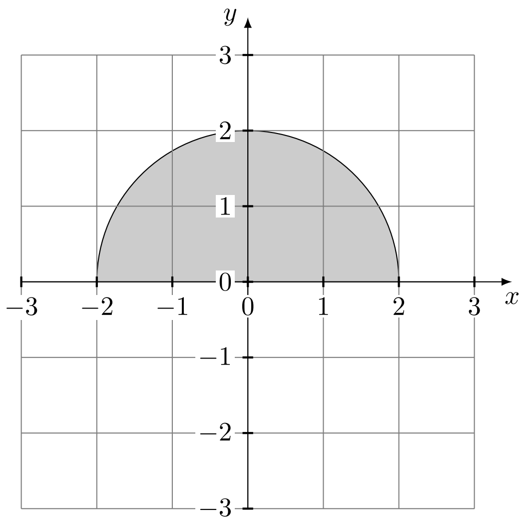
Unsere beiden Kandidaten für die Extrema sind also $(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{7}{\sqrt{13}} - 2)$ und $(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2)$. Wir werten f an diesen Stellen aus:

$$\begin{aligned} f(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{7}{\sqrt{13}} - 2) &= \frac{12}{\sqrt{13}} + \frac{14}{\sqrt{13}} + 4 = 4 + \frac{26}{\sqrt{13}} \\ f(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2) &= -\frac{12}{\sqrt{13}} - \frac{14}{\sqrt{13}} + 4 = 4 - \frac{26}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Der obere Wert ist natürlich grösser, deshalb ist das Maximum von f unter den gegebenen Nebenbedingungen $4 + \frac{26}{\sqrt{13}}$, angenommen in $(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{7}{\sqrt{13}} - 2)$, und das Minimum $4 - \frac{26}{\sqrt{13}}$, angenommen in $(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2)$.

Aufgabe 2: Gebiet mit Rand
Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum der Funktion $f(x,y) = x + y$ auf $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Lösung: Wiederum ist es sehr wichtig (!) sich zuerst eine Zeichnung des Gebietes anzufertigen, über das extremiert werden soll. (Dies vermeidet "dumme Fehler" und offensichtlich unsinnige Lösungen.) In unserem Fall ist Ω eine halbe Kreisscheibe



Für unsere Extremalstellen müssen wir folgende Kandidaten betrachten:

1. Punkte im Inneren von Ω, an denen $\nabla f = 0$ ist. Hier erhalten wir

$$0 = \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Diese Gleichung ist nicht lösbar, wir erhalten also keine potentiellen Extremalstellen.

2. Punkte auf dem (inneren des) oberen Halbkreises. Hier verwenden wir Lagrange-Multiplikatoren und müssen lösen:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \nabla (x^2 + y^2) = 2\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ x^2 + y^2 &= 4 \\ y &> 0 \end{aligned}$$

   Wir erhalten also $x = y$, und wegen der zweiten Gleichung $x = y = \pm\sqrt{2}$. Wegen der 3. Bedingung müssen wir nur den Kandidaten $x = y = +\sqrt{2}$ betrachten.

3. Punkte auf dem unteren Randsegment, also $x \in (-2, 2)$,$y = 0$. Wiederum verwenden wir Lagrange-Multiplikatoren, und müssen also lösen

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \nabla (y) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ y &= 0 \\ |x| &< 2 \end{aligned}$$

   Schon die erste Gleichung ist nicht lösbar, wir erhalten hier also keine Kandidaten.

4. Zuletzt sind noch die Eckpunkte Kandidaten, d.h., $y = 0$, $x = \pm 2$.

Wir haben also insgesamt die Kandidaten für Extremalstellen $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$ erhalten. Auswerten der Funktion f ergibt

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) &= 2\sqrt{2} \\ f(2, 0) &= 2 \\ f(-2, 0) &= -2 \end{aligned}$$

Das Minimum von f auf Ω ist also -2, angenommen in $(-2, 0)$, und das Maximum ist $2\sqrt{2}$, angenommen in $\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

Hinweis: Extremalwertprobleme der obigen Typen sind sehr typische Prüfungsaufgaben. Das Vorgehen ist dabei allgemein wie folgt:

1. Man vergegenwärtigt sich die Menge, auf der extremiert werden soll (Zeichnung!).
2. Wenn nötig zerlegt man die Menge in mehrere Teile, in denen ggf. die Extremalstelle liegen könnte: im Inneren, auf dem Rand, ggf. schaut man sich mehrere Randkomponenten separat an wie oben.
3. Die einzelnen Komponenten sollen jew. Untermannigfaltigkeiten sein, und man verwendet jeweils die Methode der Lagrange-Multiplikatoren um Kandidaten für Extremalstellen zu finden. (Ist die Komponente ein einzelner (Eck-)punkt wie oben, ist das natürlich überflüssig, der Punkt ist dann einfach ein Kandidat.)
4. Man wertet die Funktion in allen gefundenen Kandidaten für die Extremalstellen aus, der grösste bzw. kleinste Funktionswert ist dann das Maximum bzw. Minimum.