Woche 1 – Übersicht & Tricks

(Disclaimer: Die hier vorzufindenden Notizen haben keinerlei Anspruch auf Korrektheit oder Vollständigkeit und sind nicht Teil des offiziellen Vorlesungsmaterials. Alle Angaben sind ohne Gewähr.)

(Starke) Mathematische Induktion:

Prinzip der vollst. Induktion:

$(A(n_0) \land [\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : A(n) \Rightarrow A(n+1)]) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : A(n)$

- Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : A(n)$
- Induktionsanfang / Base Case (IA/BC): Zeige, dass A für kleinstes n_0 gilt

  "A(n) gilt für EIN **konkretes** n"
- Induktionshypothese / Induktionsvorraussetzung (IH / IV): $\exists m \in \mathbb{N}, m \geq n_0 : A(m)$

  "A(m) gilt für EIN **allgemeines** m"
- Induktionsschritt (IS): Beweis von $A(m) \Rightarrow A(m+1)$

  "Wenn A(m) für ein m gilt, dann gilt immer auch A(m+1), da wir m allgemein gehalten haben"

⇒ *Induktionsbehauptung (IB):* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : A(n)$

Prinzip der Starken Induktion:

$(A(n_0) \land [\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : (\forall k \in \mathbb{N}, n_0 < k < n : A(k)) \Rightarrow A(n)]) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : A(n)$

- Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : A(n)$
- Induktionsanfang / Base Case (IA/BC): Zeige, dass A für kleinstes $n_0 \in \mathbb{N}$ (oder eine Menge an kleinsten $n_0, \dots, n_x \in \mathbb{N}$) gilt

  "A(n) gilt für EIN **konkretes** n_0 (bzw. EINE **konkrete Menge** $M \coloneqq \{n_0, \dots, n_x\}$)"
- Induktionshypths. / Induktionsvorstz. (IH / IV): $\exists m \in \mathbb{N}, m \geq n_0 : \forall n_0 < k < m : A(k)$

  "A(k) gilt für alle k < m für EIN **allgemeines** m"
- Induktionsschritt (IS): Beweis von $A(m) \Rightarrow A(m+1)$

  "Wenn A für alle $k \in \{n_0, \dots, m\}$ gilt, dann gilt immer auch A(m+1), da wir n allgemein gehalten haben"

⇒ *Induktionsbehauptung (IB):* $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$

Regeln & Tricks für "Asymptotic Growth"-Aufgaben:

Analyse	Beschreibung
$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$	„f wächst langsamer* als g"
$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C \in \mathbb{R}^+$	„f und g wachsen gleich schnell*"
$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$	„f wächst schneller* als g"

- Hilfreich zum Abschätzen von $n!$ – Die Stirling-Approximation: $n! \approx \sqrt{2\pi n} * \left(\frac{n}{e}\right)^n$
- Hilfreich zum Vergleichen von Grenzwerten: "L'Hopital's Rule": Wenn $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ und $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ differenzierbar sind, $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty = \lim_{n\to\infty} g(n)$ und $\forall n \in \mathbb{R}^+: g(n) \neq 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{f\prime(n)}{g\prime(n)} = C \in \mathbb{R}_0^+$ oder $\lim_{n\to\infty} \frac{f\prime(n)}{g\prime(n)} = \infty$ dann gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{f\prime(n)}{g\prime(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$
- $a^{\log_2 n} = a^{\frac{\log_a n}{\log_a 2}} = a^{\log_a(n) * \frac{1}{\log_a 2}} = \left(a^{\log_a n}\right)^{\frac{1}{\log_a 2}} = n^{\frac{1}{log_a 2}} = n^{\frac{\log_2 a}{\log_a a}} = n^{\log_2 a}$
- $n^{100} = e^{100 * \ln(n)}$

Hands-On: Induktionsbeweise

1)

Sei: $A(n) \equiv (n^2 + n)\ ergibt\ stets\ eine\ durch\ 2\ teilbare\ Zahl$
Beweise, dass gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$

Induktionsanfang: $(n = 0)$: $(0^2 + 0) = 0$ und 0 ist durch 2 teilbar.

Induktionsvorraussetzung: Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig, wir nehmen an, dass $A(m)$ gilt.

Induktionsschritt: $(m \to m + 1)$: $A(m + 1) \equiv \left((m + 1)^2 + (m + 1)\right)\ ist\ durch\ 2\ teilbar$. Es gilt: $\left((m + 1)^2 + (m + 1)\right) = m^2 + 2m + 1 + m + 1 = (m^2 + m) + 2(m + 1)$ Nun sehen wir, dass $2(m + 1)$ trivialerweise durch 2 teilbar ist. Ausserdem, haben wir per I.V. angenommen, dass $A(m)$ gilt, also $(m^2 + m)$ durch 2 teilbar ist. Da die Summe von zwei, durch 2 teilbaren Zahlen auch durch 2 teilbar ist, haben wir damit gezeigt, dass $A(m + 1)$ gilt.

Nach dem Prinzip der vollständigen mathematischen Induktion folgt: $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ ■

2)

Sei $A(n) \equiv Die\ Zahl\ n \in \mathbb{N}\ kann\ als\ Produkt\ endlich\ vieler\ Primzahlen\ dargestellt\ werden$
Beweise, dass gilt: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : A(n)$

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : A(n)$

Induktionsanfang: $(n = 2)$: Trivial, die Zwei ist eine Primzahl.

Induktionsvorraussetzung: Sei $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ beliebig. Wir nehmen an: $\forall k \in \mathbb{N}, 2 \leq k < m : A(k)$

Induktionsschritt: $(m \to m + 1)$: $A(m + 1) \equiv m + 1\ kann\ als\ Produkt\ endlich\ vieler\ Prim\text{-}zahlen\ dargestellt\ werden$. Wir verwenden eine Case Distinction für den Induktionsschritt:
Case 1: $m + 1$ ist eine Primzahl. Dann sind wir fertig mit dem Proof.

Case 2: $m + 1$ ist keine Primzahl. Dann existieren $a, b \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq a < m$ und $2 \leq b < m$ mit: $m + 1 = a * b$. Nun können haben wir per I.V. angenommen, dass gilt : $\forall k \in \mathbb{N}, 2 \leq k < m :\ A(k)$ also auch $A(a), A(b)$, d.h., a und b können je als Produkt endlich vieler Primzahlen geschrieben werden und damit auch $m + 1 = a * b$ ■

Hands-On: Asymptotic Growth

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ mit $f(n) \coloneqq 100 * n^2 * \ln(n)$ und $g(n) \coloneqq \sqrt{n} * n^2$
Welche der beiden Funktionen wächst asymptotisch schneller als die andere (oder wachsen sie gleich schnell)?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{100 * n^2 * \ln(n)}{\sqrt{n} * n^2} = \lim_{n\to\infty} 100 * \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 100 * \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$$

Jetzt verwenden wir Def. 1, Homework 0: $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ für $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ (f, g def. auf $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{N}$), falls $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert, um L'Hopitals Rule zu verwenden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 100 * \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \overset{\text{L'H}}{=} 100 * \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2 * \sqrt{x}}} = 100 * \lim_{x\to\infty} \frac{2 * \sqrt{x}}{x} = 200 * \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Da $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$, gilt: g wächst asymptotisch schneller als f.