

# Woche 1 – Übersicht & Tricks

(Disclaimer: Die hier vorzufindenden Notizen haben keinerlei Anspruch auf Korrektheit oder Vollständigkeit und sind nicht Teil des offiziellen Vorlesungsmaterials. Alle Angaben sind ohne Gewähr.)

## Allgemeines:

- In A&D gibt es ein Bonussystem. Im Semester können für Theorie-Abgaben, Peer-Gradings und Programmieraufgaben Punkte gesammelt werden, für einen Bonus von bis zu 0.25 auf die finale Note. Ab 80% der Punkte gibt es 0.25, bis dahin wird interpoliert.
- Jede Woche können bis zu vier Bonuspunkte mit den Abgaben der Theorieaufgaben gesammelt werden (3P für die Abgabe und 1P für das Peer-Grading) – beides in Gruppen
- Alle 3 Wochen werden die Teams gewechselt, Bekanntgabe d. Gruppen in der Übung
- Jeden Montag (ab 26.09.) wird das jeweils neue Aufgabenblatt veröffentlicht. Abgabefrist ist Montagmorgens (in der jeweiligen Woche darauf) um exakt 9 Uhr morgens.
- Ich werde Abgaben auf Papier und per Polybox-Drop (Link auf Website/Mail) akzeptieren.

## (Starke) Mathematische Induktion:

Prinzip der vollst. Induktion:

$$(A(n_0) \wedge [\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : A(n) \Rightarrow A(n+1)]) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : A(n)$$

- Behauptung:  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : A(n)$
- Induktionsanfang / Base Case (IA/BC): Zeige, dass A für kleinstes  $n_0$  gilt  
"A(n) gilt für EIN konkretes n"
- Induktionshypothese / Induktionsvoraussetzung (IH / IV)  $A(m)$  gilt für bel. fixes n.  
"A(m) gilt für EIN allgemeines m"
- Induktionsschritt (IS): Beweis von  $A(m) \Rightarrow A(m+1)$   
"Wenn A(m) für ein m gilt, dann gilt immer auch A(m+1), da wir m allgemein gehalten haben"

$\Rightarrow$  Induktionsbehauptung (IB):  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : A(n)$

Prinzip der Starken Induktion:

$$(A(n_0) \wedge [\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : (\forall k \in \mathbb{N}, n_0 \leq k < n : A(k)) \Rightarrow A(n)]) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : A(n)$$

- Behauptung:  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : A(n)$
- Induktionsanfang / Base Case (IA/BC): Zeige, dass A für kleinstes  $n_0 \in \mathbb{N}$  (oder eine Menge an kleinsten  $n_0, \dots, n_x \in \mathbb{N}$ ) gilt  
"A(n) gilt für EIN konkretes  $n_0$  (bzw. EINE konkrete Menge  $M := \{n_0, \dots, n_x\}$ )"
- Induktionshypth. / Induktionsvorstz. (IH / IV): Für bel. fix  $m \geq n_0 : \forall n_0 \leq k < m : A(k)$   
"A(k) gilt für alle k < m für EIN allgemeines m"
- Induktionsschritt (IS): Beweis von  $A(m) \Rightarrow A(m+1)$   
"Wenn A für alle  $k \in \{n_0, \dots, m\}$  gilt, dann gilt immer auch A(m+1), da wir n allgemein gehalten haben"

$\Rightarrow$  Induktionsbehauptung (IB):  $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$

## Regeln & Tricks für "Asymptotic Growth"-Aufgaben:

Analyse	Beschreibung
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$	„f wächst langsamer* als g“
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C \in \mathbb{R}^+$	„f und g wachsen gleich schnell*“
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$	„f wächst schneller* als g“

- Hilfreich zum Abschätzen von  $n!$  – Die Stirling-Approximation:  $n! \approx \sqrt{2\pi n} * \left(\frac{n}{e}\right)^n$
- Hilfreich zum Vergleichen von Grenzwerten: "L'Hopital's Rule": Wenn  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  und  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  differenzierbar sind,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} g(n)$  und  $\forall n \in \mathbb{R}^+: g(n) \neq 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} = C \in \mathbb{R}_0^+$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)} = \infty$  dann gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$
- $a^{\log_2 n} = a^{\frac{\log_a n}{\log_a 2}} = a^{\log_a(n) * \frac{1}{\log_a 2}} = (a^{\log_a n})^{\frac{1}{\log_a 2}} = n^{\frac{1}{\log_a 2}} = n^{\frac{\log_2 a}{\log_a a}} = n^{\log_2 a}$
- $n^{100} = e^{100 * \ln(n)}$

## Hands-On: Induktionsbeweise

1)

Sei:  $A(n) \equiv (n^2 + n)$  ergibt stets eine durch 2 teilbare Zahl

Beweise, dass gilt:  $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$

**Behauptung:**  $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$

**Induktionsanfang:** ( $n = 0$ ):  $(0^2 + 0) = 0$  und 0 ist durch 2 teilbar.

**Induktionsvoraussetzung:** Sei  $m \in \mathbb{N}$  beliebig, wir nehmen an, dass  $A(m)$  gilt.

**Induktionsschritt:** ( $m \rightarrow m + 1$ ):  $A(m + 1) \equiv ((m + 1)^2 + (m + 1))$  ist durch 2 teilbar. Es gilt:  $((m + 1)^2 + (m + 1)) = m^2 + 2m + 1 + m + 1 = (m^2 + m) + 2(m + 1)$  Nun sehen wir, dass  $2(m + 1)$  trivialerweise durch 2 teilbar ist. Ausserdem, haben wir per I.V. angenommen, dass  $A(m)$  gilt, also  $(m^2 + m)$  durch 2 teilbar ist. Da die Summe von zwei, durch 2 teilbaren Zahlen auch durch 2 teilbar ist, haben wir damit gezeigt, dass  $A(m + 1)$  gilt.

Nach dem Prinzip der vollständigen mathematischen Induktion folgt:  $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$  ■

2) Prüfungsaufgabe FS20

Beweise, dass  $\forall n \geq 5$  gilt:  $n^3 \geq 4n^2 + 25$

**Behauptung:**  $\forall n \geq 5: n^3 \geq 4n^2 + 25$

**Induktionsanfang:** ( $n = 5$ ):  $5^3 = 125$  und  $4 * 5^2 + 25 = 125 \Rightarrow$  die Aussage stimmt für  $n = 5$

**Induktionsvoraussetzung:** Sei  $m \geq 5$  beliebig. Wir nehmen an, dass die Aussage für  $m$  stimmt.

**Induktionsschritt:**  $(m \rightarrow m + 1)$ :  $(m + 1)^3 \geq m^3 + 3m^2 + 3m + 1 \stackrel{I.H.}{\geq} 4m^2 + 25 + 3m^2 + 3m + 1 = 7m^2 + 3m + 26 \geq 7m^2 + 2m + 29 \geq 4m^2 + 8m + 29 = 4(m + 1)^2 + 25$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion, folgt dass  $\forall n \geq 5: n^3 \geq 4n^2 + 25$  ■

3)

Sei  $A(n) \equiv$  Die Zahl  $n \in \mathbb{N}$  kann als Produkt endlich vieler Primzahlen dargestellt werden  
 Beweise, dass gilt:  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : A(n)$

**Behauptung:**  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : A(n)$

**Induktionsanfang:**  $(n = 2)$ : Trivial, die Zwei ist eine Primzahl.

**Induktionsvoraussetzung:** Sei  $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$  beliebig. Wir nehmen an:  $\forall k \in \mathbb{N}, 2 \leq k < m : A(k)$

**Induktionsschritt:**  $(m \rightarrow m + 1)$ :  $A(m + 1) \equiv m + 1$  kann als Produkt endlich vieler Primzahlen dargestellt werden. Wir verwenden eine Case Distinction für den Induktionsschritt:

Case 1:  $m + 1$  ist eine Primzahl. Dann sind wir fertig mit dem Proof.

Case 2:  $m + 1$  ist keine Primzahl. Dann existieren  $a, b \in \mathbb{N}$  mit  $2 \leq a < m$  und  $2 \leq b < m$  mit:  $m + 1 = a * b$ . Nun können haben wir per I.V. angenommen, dass gilt:  $\forall k \in \mathbb{N}, 2 \leq k < m : A(k)$  also auch  $A(a), A(b)$ , d.h.,  $a$  und  $b$  können je als Produkt endlich vieler Primzahlen geschrieben werden und damit auch  $m + 1 = a * b$  ■

## Hands-On: Asymptotic Growth

1)

Seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit  $f(n) := 100 * n^2 * \ln(n)$  und  $g(n) := \sqrt{n} * n^2$

Welche der beiden Funktionen wächst asymptotisch schneller als die andere (oder wachsen sie gleich schnell)?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100 * n^2 * \ln(n)}{\sqrt{n} * n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 100 * \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 100 * \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$$

Jetzt verwenden wir Def. 1, Homework 0:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  für  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $f, g$  def. auf  $\mathbb{R}$  statt  $\mathbb{N}$ ), falls  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  existiert, um L'Hopitals Rule zu verwenden:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 100 * \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \stackrel{L'H}{=} 100 * \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2 * \sqrt{x}}} = 100 * \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 * \sqrt{x}}{x} = 200 * \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Da  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ , gilt:  $g$  wächst asymptotisch schneller als  $f$ .

2) Prüfungsaufgabe HS20

Seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit  $f(n) := \log_3(n^4)$  und  $g(n) := \log_6(n^2)$

Welcher der beiden Funktionen wächst asymptotisch schneller als die andere?

Wir verwenden den Fakt, dass  $\log(x^c) = c * \log x$  und, dass  $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3(n^4)}{\log_6(n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 * \log_3 n}{2 * \log_6 n} = 2 * \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\log_6 n}{\log_6 3}}{\log_6 n} = 2 * \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log_6 3} = \frac{2}{\log_6 3}$$

Da  $\frac{2}{\log_6 3} \in \mathbb{R}^+$ , wachsen f und g asymptotisch gleich schnell.