Woche 2 – Übersicht & Tricks

(Disclaimer: Die hier vorzufindenden Notizen haben keinerlei Anspruch auf Korrektheit oder Vollständigkeit und sind nicht Teil des offiziellen Vorlesungsmaterials. Alle Angaben sind ohne Gewähr.)

O-Notation:

Def.: Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ eine Kostenfunktion. Wir definieren nun eine Menge von Funktionen, die auch nicht schneller wachsen als f, konkret:

$$O(f) := \{g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid es\ gibt\ c > 0,\ n_0 \in \mathbb{N}\ so,\ dass\ g(n) \leq c * f(n)\ für\ alle\ n > n_0\}$$

- Aus der Definition folgt:
  - Die Funktion f ist asymptotisch eine obere Schranke für alle $g \in O(f)$
  - Beim Untersuchen des asymptotischen Verhaltens von Funktionen im Kontext der O-Notation können wir konstante Faktoren ignorieren
  - Abgeschlossenheit unter Addition:

$$g_1 \in O(f), g_2 \in O(f) \Rightarrow g_1 + g_2 \in O(f)$$

Beweis für Abgeschlossenheit unter Addition[1]*:*

Seien $g_1: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *und* $g_2: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $g_1 \in O(f), g_2 \in O(f)$*. Dann gilt per Def. der O-Notation:* $\exists c_1 > 0, n_1 \in \mathbb{N} : g(n) < c_1 * f(n)\ \ \forall n > n_1$ *and*
$\exists c_2 > 0, n_2 \in \mathbb{N} : g_2(n) < c_2 * f(n)\ \forall n > n_2$
Es gilt: $g_1 + g_2 \in O(f) \iff \exists c_0 > 0, n_0 \in \mathbb{N} : g_1(n) + g_2(n) < c_0 * f(n)\ \ \forall n > n_0$
Nun zeigen wir, dass solche c_0 *und* n_0 *existieren: Wir wählen* $c_0 := c_1 + c_2$ *und* $n_0 := max\{n_1, n_2\}$*,*
und sehen: $g_1(n) + g_2(n) \leq c_1 * f(n) + c_2 * f(n) = (c_1 + c_2) * f(n) = c_0 * f(n)\ \ \forall n > n_0$ ■

Analyse	**O-Notation**	**Beschreibung**
$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$	$f \in O(g)$ und $g \notin O(f)$	„f wächst **langsamer** als g“
$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C \in \mathbb{R}^+$	$f \in O(g)$ und $g \in O(f)$	„f und g wachsen **gleich schnell***“
$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$	$f \notin O(g)$ und $g \in O(f)$	„f wächst **schneller** als g“

Neben der O-Notation gibt es noch die **Ω-Notation**. Sie ist das gleiche wie die O-Notation, nur dass die Ω-Notation der Kostenfunktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ die Menge von Funktionen sind die mindestens so schnell wachsen als f, also formal:

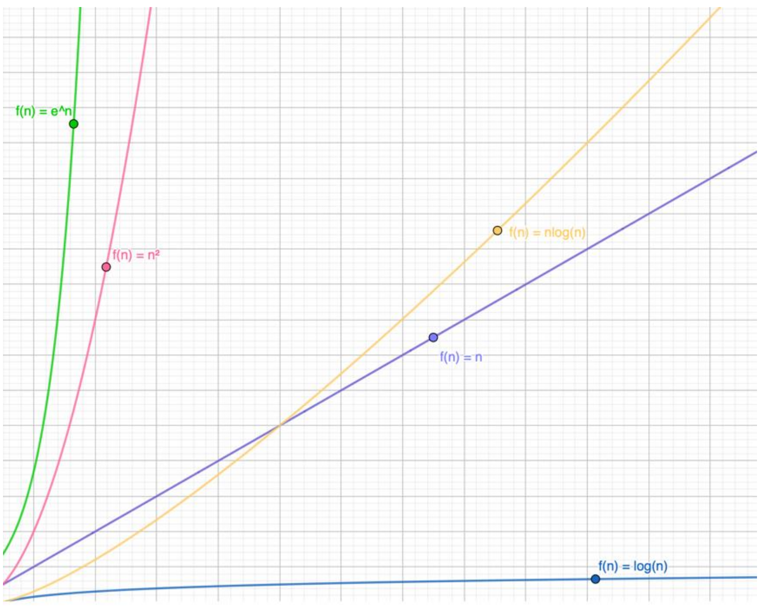
$$\Omega(f) \coloneqq \{g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ | \, es \; gibt \; c > 0, \; n_0 \in \mathbb{N} \; so, \; dass \; g(n) \geq c * f(n) \; für \; alle \; n > n_0\}$$

Dazu gibt es noch die **Θ-Notation**. Sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Kostenfunktion, dann definieren wir die Menge aller Funktionen, die asymptotisch gleich schnell als f wachsen, also

$$\Theta(f) \coloneqq O(f) \cap \Omega(f)$$

Wichtige Komplexitätsklassen der Laufzeitanalyse:

Konstant: $O(1)$	Linear: $O(n)$	Polynomiell: $O(n^c), c \in \mathbb{R}^+$
Logarithmisch: $O(\log(n))$	quasi-linear: $O(n * \log(n))$	Exponentiell: $O(c^n), c \in \mathbb{R}^+$



Tricks zum Umformen und Abschätzen von Summen:

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n*(n+1)}{2}$
2. $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} 1 = \sum_{j=1}^{n} (n-j+1) = \frac{n(n+1)}{2}$ (denn $\sum_{j=1}^{n} (n-j+1)$ ist letzten Endes nur die Summe aus 1., bloss "andersherum gezählt")
3. $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} 1 = n^3$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2*(n+1)^2}{4}$
5. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n*(n+1)}{2}$
6. $\sum_{i=1}^{n} i * \log(i) \geq \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} i * \log(i) \geq \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} \frac{n}{2} * \log\left(\frac{n}{2}\right) \geq \frac{n^2}{4} * \log\left(\frac{n}{2}\right)$
7. $\sum_{i=1}^{n} i * \log(i) \leq \sum_{i=1}^{n} n * \log(n) = n^2 * \log(n)$

Hands-On: O-Notation:

1) (Alte Bonusaufgabe):

Gilt: $\sqrt{n} \leq O(\sqrt[3]{n \cdot \log n}$?

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n \cdot \log n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}}{n^{1/3} \cdot \log^{1/3} n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/6}}{\log^{1/3} n} = \infty$$

Also: $\sqrt{n} \nleq O(\sqrt[3]{n \cdot \log n}$

2) (Alte Bonusaufgabe):

Gilt: $\sum_{k=0}^{n} 2^k \leq O(2^n)$?

Lösung:

$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$, also: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} 2^k}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 \in \mathbb{R}^+$

Also: $\sum_{k=0}^{n} 2^k \leq O(2^n)$

3) (HS20):

Gilt: $\log_3 n^4 \leq O(\log_6 n^2)$?

Lösung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_3 n^4}{\log_6 n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 \cdot \log_3 n}{2 \cdot \log_6 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \frac{\log_6 n}{\log_6 3}}{\log_6 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\log_6 3} = \frac{2}{\log_6 3} \in \mathbb{R}^+$$

Also: $\log_3 n^4 \leq O(\log_6 n^2)$

4)

Gilt: $\sum_{i=1}^{n} \log_2(i) \in O(n * \log(n))$?

Lösungsweg 1: Da die O-Notation asymptotisch obere Schranken für Funktionen definiert, versuchen wir, die Summe nach oben abzuschätzen:

$$\sum_{i=1}^{n} \log_2(i) \leq \sum_{i=1}^{n} \log_2(n) = n * \log_2(n) \in O(n * \log(n))$$

Lösungsweg 2: Es gilt: $\log(a * b) = \log(a) + \log(b)$. Dies verwenden wir nun:

$$\sum_{i=1}^{n} \log_2(i) = \log_2(\prod_{i=1}^{n} i) = \log_2(n!) \leq \log_2(n^n) = n * \log_2(n) \in O(n * \log(n))$$

Erklärung zu Lösungsweg 2: $\log(n!) \leq \log(n^n)$, den der Logarithmus ist eine streng monoton wachsende Funktion, also gilt: $\log(x) < \log(y) \Leftrightarrow x < y$ und $n! < n^n$, da offensichtlich:

$n! = 1 * 2 * \ldots * n$ (insgesamt n Faktoren) während $n^n = n * n * \ldots * n$ (insgesamt n Faktoren)

4) (HS20) (**sehr schwer, erfordert ein wenig Kreativität. Ist aber eine gute Übung, daher empfehle ich sie erst einmal alleine zu versuchen)**:

Gilt: $\sum_{i=1}^{n} i! \in \Omega\,(n \cdot n!)$?

Lösungsweg 1: Wenn $\sum_{i=1}^{n} i! \in \Omega\,(n \cdot n!)$ gilt, muss auch $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i!}{n \cdot n!} > 0$ gelten. Aber wir sehen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i!}{n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i!}{n!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)! + (n-1) * \frac{(n-1)!}{n}}{n!}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)! + n * \frac{(n-1)!}{n}}{n!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2 * (n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 \quad \lightning$$

Also ist die Aussage falsch.