

Analysis I & II

Marvin Steinkellner, Sommer '21

Prof. E. Kowalski & T. Riviere

basierend auf der ZSMF von

C. Dirren Version 16.09.21

1 Grundlagen

1.1 Supremum und Infimum

$\sup(X) :=$ „kleinste obere Schranke“ mit $\sup(\emptyset) := -\infty$
 $\inf(X) :=$ „grösste untere Schranke“ mit $\inf(\emptyset) := \infty$

Beispiele

- $\Omega = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
 $\sup(\Omega) = 1$ $\inf(\Omega) = 0$
- $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ und (a, b) mit $a < b$
 a ist jeweils das Infimum und b das Supremum

1.2 Binomialkoeffizienten

- Allgemein ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{C}$)

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

- Kombinatorik ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $n \geq k$)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

1.3 Mitternachtsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.4 Summen und Produkte

1.4.1 Teleskopsummen

$$\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$$

1.4.2 Arithmetische Summe

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{Induktion})$$

1.4.3 Fakultät

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad 0! := 1$$

1.4.4 Gammafunktion

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}$$

1.5 Polynomdivision

- Meistens durch NST des Polynoms teilen, da kein Rest übrig bleibt
- NST durch raten (Ordnung +2) bzw. Mitternachtsformel (Seite 1 Kapitel 1.3) herausfinden

Beispiel

$$\begin{array}{r} (-2x^2 - x - 1) : (x-1) = -2x - 3 + \frac{-4}{x-1} \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ -3x - 1 \\ \underline{3x - 3} \\ -4 \end{array}$$

1.6 Partialbruchzerlegung

Nützlich um Integrale der Form $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ zu berechnen

- Polynomdivision (falls $n > m$) mit Rest (ganzrational + echt gebrochen)
- Nullstellen von $Q_m(x)$ berechnen
- Nullstellen ihrem Partialbruch zuordnen
 - reelle r-fache Nullstelle x_0

$$\frac{A_1}{(x-x_0)} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_0)^r}$$

- komplexe r-fache Nullstelle

$$\frac{A_1 x + B_1}{(x^2 + 2ax + b)} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + 2ax + b)^2} + \dots + \frac{A_r x + B_r}{(x^2 + 2ax + b)^r}$$

- Gleichung aufstellen

- Trick: Nullstellen einsetzen und so die Zähler einfacher Nullstellen bzw. höchster Nullstellen berechnen

Beispiel

$$f(x) = \frac{x}{(x^2-1)} \quad x = A(x-1) + B(x+1)$$

$$(x_0 = 1) \quad 1 = 0 + 2B \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$(x_1 = -1) \quad -1 = -2A + 0 \rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

6. Koeffizientenvergleich

Anmerkung

- i) Die allgemeine Stammfunktion von $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ist im Kapitel 7.1.4 auf Seite 6 zu finden

1.7 Vollständige Induktion

Zu beweisen: Aussage $A(n)$ ist wahr, $\forall n \geq n_0$ $n \in \mathbb{N}$

- Induktionsverankerung:** Beweise $A(n_0)$ direkt
- Induktionsvoraussetzung:** Nimm an dass $A(n)$ für ein $n \geq n_0$ gilt
- Induktionsschritt:** Beweise $A(n+1)$ mit der Induktionsvoraussetzung. Daraus folgt dann $A(n) \quad \forall n \geq n_0$

Beispiel

Zu zeigen: $u(n) = 11^n - 1$ durch 10 teilbar $\forall n \geq 1$

- Induktionsanfang $n_0 = 1$ $u(1) = 11 - 1 = 10 \quad \checkmark$
- Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} u(n+1) &= 11^{n+1} - 1 \\ &= 11 \cdot 11^n - 1 \\ &= (10+1)11^n - 1 \\ &= \underbrace{10 \cdot 11^n}_{\text{durch 10 teilbar}} + \underbrace{11^n - 1}_{u(n)} \end{aligned}$$

$u(n)$ ist aufgrund der Voraussetzung durch 10 teilbar, somit ist $u(n)$ durch 10 teilbar $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1 \quad \blacksquare$

2 Folgen

2.1 Konvergenzverhalten von Folgen

Cauchy-Folge: Abstände der Glieder werden beliebig klein
2.1.1 Wichtige Grenzwerte Cauchy-Folge $\Leftrightarrow$ konvergente Folge
für $x \rightarrow \infty$: $\ln(\ln(x)) \leq \ln(x) \leq x^p$ ($p > 0$) $\leq p^x$ ($|p| > 1$) $\leq x^x \leq x^x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} = 0 \quad \forall s \in \mathbb{Q}^+$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \forall q \in \mathbb{C} \quad |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{z^n} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad |z| > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Proposition 4.4.9 Kowalski

$\forall r > 0, a \geq 0$ gilt:

$$x^r \log(x)^a \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \quad \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

2.1.2 Berechnen von Grenzwerten

- **Brüche:** Durch die grösste Potenz des Zählers/Nenners teilen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 7n}{2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{7}{n^2}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

- **Wurzeltherme:** Mit der 3. binomischen Formel erweitern

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) & \quad \parallel \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1 + \frac{1}{n} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- **Sonstige Terme:** Falls a_n monoton (fallend/steigend) ist, dann suche eine untere Schranke $c_1(n) \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$ und eine obere Schranke $c_2(n) \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} c_1(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_2(n) = c$.
Es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt[n]{u^n + v^n} \quad u, v \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad u > v \\ \text{Untere Schranke: } a_n &\geq \sqrt[n]{u^n} = u = c_1(n) \\ \text{Obere Schranke: } a_n &\leq \sqrt[n]{2u^n} = \sqrt[n]{2}u = c_2(n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_1(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} c_2(n) = u \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = u \end{aligned}$$

3 Reihen

3.1 Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad q \in \mathbb{C} \quad |q| < 1$$

3.2 Allgemeine harmonische Reihe (Dirichlet-Reihe)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konvergiert für} & s > 1 \\ \text{divergiert für} & s \leq 1 \end{cases}$$

3.3 Binomische Reihe

$$(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Anmerkungen

- Konvergenz, falls $x > 0$ und $|\frac{y}{x}| < 1$
- Die Definition der allgemeinen Binomialkoeffizienten ist im Kapitel 1.2 auf Seite 1

3.4 Cauchy-Produktformel

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

3.5 Konvergenzkriterien

3.5.1 Nullfolgenkriterium

Falls a_n keine Nullfolge bildet, so divergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{sonst: keine Aussage}$$

3.5.2 Leibnizkriterium

Falls a_n eine monoton fallende Nullfolge bildet, dann konvergiert auch die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

3.5.3 Majorantenkriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe und a_n die Elemente einer Folge mit $a_n \leq b_n \forall n$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

3.5.4 Minorantenkriterium

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine divergente Reihe und a_n die Elemente einer Folge mit $a_n \geq b_n \forall n$, so divergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (meistens ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ die harmonische Reihe)
 $\hookrightarrow \frac{1}{n}$

3.5.5 Quotientenkriterium

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{divergiert} & Q > 1 \\ \text{konvergiert absolut} & Q < 1 \\ \text{keine Aussage} & Q = 1 \end{cases}$$

Konvergenzradius $R = \frac{1}{Q}$

3.5.6 Wurzelkriterium

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{divergiert} & L > 1 \\ \text{konvergiert absolut} & L < 1 \\ \text{keine Aussage} & L = 1 \end{cases}$$

Konvergenzradius $R = \frac{1}{L}$

3.5.7 Integralkriterium

Sei $p \in \mathbb{Z}$, $f: [p, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton fallend und das Integral $\int_p^\infty f(x) dx$ existiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ und es gilt die Abschätzung

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \leq \int_p^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$$

3.6 Potenzreihe

Eine Potenzreihe hat folgende Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad x_0 : \text{Entwicklungspunkt}$$

3.6.1 Wichtige Potenzreihen um Null entwickelt! (ev. Verschieben für Taylor)

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \arctan(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \\ \cosh(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \sinh(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

3.6.2 Konvergenzradius

Sei R der Konvergenzradius einer Potenzreihe. Dann konvergiert die Potenzreihe absolut $\forall x \in \mathbb{C}$, $|x - x_0| < R$ und divergiert für $|x - x_0| > R$.

Anmerkungen

- Der Konvergenzradius berechnet sich wie folgt: $R = \frac{1}{Q} = \frac{1}{L}$
- Der Rand $|x - x_0| = R$ muss separat betrachtet werden

4 Funktionen

4.1 Berechnen von Grenzwerten

4.1.1 Brüche

Durch die grösste/kleinste Potenz des Zählers/Nenners teilen

4.1.2 Beträge

Beträge vereinfachen indem man sich überlegt, ob das Argument im Betrag grösser bzw. kleiner 0 ist

Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^2}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^2}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2 + x) = 4$$

Funktionenfolgen

$$f_n: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Grenzfunktion } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Punktweise Konvergenz

f_n konvergiert für jeden Punkt einzeln

$$\rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

! $f(x)$ muss nicht stetig sein!

gleichmässige/uniforme Konvergenz

$$|f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Zeige das mit Abschätzung:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq b_n \quad \text{mit}$$

b_n Nullfolge, die unabhängig von x ist

f_n konvergiert gleichmässig $\Rightarrow f$ ist stetig

Funktionenreihe

$$\text{Funktionenreihe } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

konvergiert normal falls

$$\bullet |f_n(x)| \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergiert}$$

es gilt die Implikation:

Funktionenreihe konvergiert normal

$\Downarrow$
sie konvergiert gleichmässig

Achtung: bei Funktionenreihen
ist die Grenzfunktion
die Reihe selbst

$$\left(\text{z.B. } e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right)$$

4.1.3 Wurzelterme

Wurzelterme kann man meistens mithilfe der 3. binomischen Formel erweitern

Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

4.1.4 Beschränktheit einer Funktion

Man kann die Beschränktheit einer Funktion (v.a. trig. Fkt.) ausnutzen um Grenzwerte zu berechnen

Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

4.1.5 Potenzreihen

Falls die Potenzreihe der Funktion bekannt ist, kann man sie durch die Potenzreihe darstellen

4.1.6 l'Hospitalsche Regel

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

4.1.7 "exp-log" Methode

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)^{h(x)} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \cdot \ln(g(x))\right)$$

Beispiel

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \sin(x))^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3 \sin(x))}{x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos(x)}{1 + 3 \sin(x)}\right) \\ &= e^3 \end{aligned}$$

4.1.8 Substitution

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) \quad \text{mit } u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$$

Beispiel

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) \quad u(x) &= -\ln(x) \rightarrow x = e^{-u} \\ u_0 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) &= \lim_{u \rightarrow \infty} -u e^{-u} = 0 \end{aligned}$$

4.2 Stetigkeit

4.2.1 Epsilon-Delta-Kriterium

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

4.2.2 Grenzwert-Kriterium *Stetigkeit zeigen 1-dim*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{!}{=} f(x_0)$$

Anmerkung

i) Wenn nichts anderes verlangt wird, wird die Stetigkeit meistens mit dem Grenzwert-Kriterium gezeigt

4.2.3 Stetige Funktionen

- Polynome
- Exponentialfunktion
- rationale Funktionen (Nenner $\neq 0$)
- Logarithmusfunktion
- trig. Funktionen
- Komposition von stetigen Funktionen
- hyperbolische Funktionen

4.2.4 Lipschitz Stetigkeit *"L ist die steilste Ableitung" f' beschränkt $\Rightarrow$ f Lipschitzstetig*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad L \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Anmerkung Bsp: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ ist nicht L-stetig mit $L = \max_{x \in [-5,5]} g'(x) = 10$

i) Lipschitz-stetige Funktionen sind insbesondere stetig

4.2.5 Stetigkeit überprüfen (1-dim)

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < p \\ f_2(x) & x > p \\ a & x = p \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow p^-} f_1(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow p^+} f_2(x) \stackrel{!}{=} a$$

4.2.6 Stetigkeit überprüfen (n-dim)

Der Limes $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ $x \in \mathbb{R}^n$ muss existieren und eindeutig sein

Anmerkungen

- i) Falls $n = 2$: Transformiere x und y in Polarkoordinaten, φ muss sich dabei rauskürzen, da der Limes sonst nicht eindeutig ist
- ii) Falls $n > 2$: Nur zeigen, dass der Grenzwert nicht eindeutig ist, sonst zu kompliziert $\rightarrow$ oft Richtungen $(x, y), (y, x), (x, y)$ überprüfen 

5 Differentialrechnung

5.1 Eindimensionale Differentialrechnung

Eine Funktion heisst differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert (und somit eindeutig ist)

5.1.1 Regeln

• Produktregel

$$(f \cdot h)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

• Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2}$$

• Kettenregel

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

• Umkehrregel

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

5.1.2 Taylorentwicklung

• Taylorpolynom

$$T_N f(x; x_0) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

• Fehlerabschätzung

Lagrange'sches Restglied

$$R_N(x; x_0) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x - x_0)^{N+1} \quad \xi \in [x_0, x]$$

Je nach Monotonie von $f^{(N+1)}$ $\xi = x_0$ oder $\xi = x$ einsetzen für Abschätzung

• Taylorreihe

$$Tf(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Anmerkung

i) Falls die Taylorreihe mit der Potenzreihe übereinstimmt, nennt man die Funktion analytisch und es gilt $Tf(x, x_0) = f(x)$

5.2 Mehrdimensionale Differentialrechnung

5.2.1 Richtungsableitung

$$D_v f(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h \cdot \mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h} \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

5.2.2 Differenzierbarkeit

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in U$ Vektoren und $Jf(\mathbf{x})$ eine lineare Abbildung. Die Funktion (Skalarfeld) $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist (total) differenzierbar in $\mathbf{x}_0$, falls der folgende Grenzwert existiert und eindeutig ist

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Jf(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - Jf(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \end{aligned}$$

Anmerkungen

- $Jf(\mathbf{x})$ entspricht der Jacobi-Matrix, also der ersten totalen Ableitung bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ (und $\mathbb{R}^m$ für Vektorfelder)
- $\mathbf{h}$ kann man sich als kleine Änderung vorstellen (im Grenzwert wird $\mathbf{h}$ ein Differential)
- Die Funktion ist (total) differenzierbar, falls sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches (total) differenzierbar ist
- Meistens schreibt man nur differenzierbar und meint damit totale Differenzierbarkeit

5.2.3 Vorgehen um Differenzierbarkeit zu zeigen

Funktionen die aus diffbaren Funktionen besteht, darf man als diffbar annehmen, somit muss man meistens nur einen Punkt $\mathbf{x}_0$ auf (totale) Differenzierbarkeit überprüfen

- Partielle Ableitungen über die Definition im Punkt $\mathbf{x}_0$ berechnen. Falls die partiellen Ableitungen nicht existieren, dann ist die Funktion nicht (total) differenzierbar
- Falls die partiellen Ableitungen stetig sind, dann ist auch die Funktion (total) differenzierbar
- Die lineare Abbildung $Jf(\mathbf{x}_0)$ im Punkt $\mathbf{x}_0$ berechnen
- $Jf(\mathbf{x}_0)$ in die Definition einsetzen und Grenzwert berechnen. Die Funktion ist (total) differenzierbar in $\mathbf{x}_0$, falls die Definition erfüllt ist

5.2.4 Gradient

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

5.2.5 Hesse-Matrix

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

5.2.6 Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix)

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

5.2.7 Implizite Differentiation

Erfüllt die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Gleichung $F(x, f(x)) = 0$ und gilt $F_y(x_0, y(x_0)) \neq 0$, dann ist die Ableitung von f gegeben durch

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x - 2y^3 - 3y^5 - y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= 1 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -6y^2 - 15y^4 - 1 \\ \rightarrow y'(x) &= \frac{1}{6y^2 + 15y^4 + 1} \end{aligned}$$

Anmerkung

- Falls f mehrdimensional ist, dann wende das implizite Funktionentheorem an (Kapitel 9.6 Seite 7)

5.2.8 Allgemeine Kettenregel

Seien $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^L$ und $\mathbf{g} : \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbare Funktionen, dann ist die Ableitung von $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ im Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\begin{aligned} D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})_{\mathbf{p}} &= D\mathbf{g}_{\mathbf{f}(\mathbf{p})} \circ D\mathbf{f}_{\mathbf{p}} \\ J_{\mathbf{g} \circ \mathbf{f}}(\mathbf{p}) &= J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{p})) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

5.2.9 Taylorentwicklung

• Taylorpolynom 2-ter Ordnung

$$T_2 f(x, a) = f(a) + \nabla f(a)^T (x - a) + \frac{1}{2} (x - a)^T H_f(a) (x - a)$$

• Taylorpolynom n-ter Ordnung

$$T_n f(x, a) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(x) \Big|_{x=a}$$

Anmerkungen

- Δx_i bezeichnet die Differenz $(x_i - a_i)$
- Es wird zuerst die Funktion partiell abgeleitet und erst danach am Punkt a ausgewertet

5.3 Extremwerte ohne Nebenbedingungen

5.3.1 Eindimensionale Funktion

1. Kandidaten

- Intervallgrenzen (globale Extrema)
- $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$

2. Art von Extrema

- (lokales) Maximum: $f''(x_0) < 0$
- (lokales) Minimum: $f''(x_0) > 0$

3. Vergleich lokale und globale Extrema

5.3.2 Mehrdimensionale Funktion

1. Kandidaten

$$\nabla f(x_0) \stackrel{!}{=} 0$$

2. Art von Extrema

- Maximum: $H_f(x_0)$ negativ definit
- Minimum: $H_f(x_0)$ positiv definit

Anmerkungen

- Definitheit von Matrizen Kapitel 10.8.2 (Seite 10)
- Falls $H_f(x_0)$ semipositiv bzw. seminegativ definit ist, kann keine Aussage zur Art des Extremums getroffen werden
- Wenn $H_f(x)$ negativ definit (positiv definit) ist, dann ist f konkav (konvex)

5.4 Extremwerte mit Nebenbedingungen

$$\nabla L(\mathbf{x}_0) \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad \text{mit } L = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$$

φ_i : Nebenbedingungen λ_i : Lagrange-Multiplikatoren

5.4.1 Vorgehen

1. Nebenbedingungen zeichnen
2. Menge sollte abgeschlossen und beschränkt sein $\rightarrow$ existiert ein Maximum/Minimum (die Funktion sollte natürlich auf dem Bereich auch stetig sein)
3. Gradient berechnen
 - i) innere Punkte: $\nabla f(\mathbf{x}_0) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$ ($\mathbf{x}_0$ muss Element der Menge sein)
 - ii) Randpunkte: $\nabla L \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$
4. Löse Gleichungssystem mit Nebenbedingungen
5. Kandidaten der Extrema + Eckpunkte (∇ Ableitung) aufschreiben
6. Kandidaten in $f(\mathbf{x})$ einsetzen und vergleichen

Beispiel

$$f(x, y, z) = 4y - 2z \quad \varphi_1 = x^2 + y^2 - 1 \quad \varphi_2 = 2x - y - z - 2$$

1. Nebenbedingungen zeichnen
2. $f(x, y, z)$ ist stetig und die Menge M ist beschränkt und abgeschlossen $\rightarrow \exists \text{ Max/Min}$
3. keine inneren Punkte (schräg im Raum liegende Ellipse)

$$\nabla \varphi_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla \varphi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4. Gleichungssystem lösen $\nabla f = \lambda_1 \nabla \varphi_1 + \lambda_2 \nabla \varphi_2$

$$\begin{array}{l|l} \text{I: } 0 = 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 & \text{IV: } 1 = x^2 + y^2 \\ \text{II: } 4 = 2\lambda_1 y - \lambda_2 & \\ \text{III: } 2 = \lambda_2 & \text{V: } 2 = 2x - y - z \end{array}$$

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{13} \quad \lambda_2 = 2 \quad x = \mp \frac{2}{\sqrt{13}} \\ y = \pm \frac{3}{\sqrt{13}} \quad z = \mp \frac{7}{\sqrt{13} - 2}$$

5. Punkte aufschreiben

$$P_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-7}{\sqrt{13}} - 2 \right) \\ P_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 2 \right)$$

6. Punkte vergleichen

$$f(P_1) = \frac{26}{\sqrt{13}} + 4 \\ f(P_2) = \frac{-26}{\sqrt{13}} + 4$$

Somit ist P_1 ein Maximum und P_2 ein Minimum

Anmerkungen

- i) Es kann sein, dass der Rand nicht durch Nebenbedingungen darstellbar ist, dann kann man die Funktion direkt für den Rand auswerten und die Funktionswerte vergleichen
- ii) Man kann den Rand auch parametrisieren und die Parametrisierung in $f(\mathbf{x})$ einsetzen. Jetzt kann man wie gewohnt die Ableitung gleich 0 setzen und die Kandidaten berechnen

6 Gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE)

6.1 Separierbare Differentialgleichung

Falls eine DGL folgende Form hat, dann gilt

$$y' = p(y)q(x) \rightarrow \int \frac{1}{p(y)} dy = \int q(x) dx$$

Wenn man die Integrale löst, erhält man eine implizite Gleichung. y explizit darzustellen kann schwierig sein, zumal man die Lösungsmenge nicht verändern darf

Beispiel

$$yy' + 2 = 0 \rightarrow \int y dy = \int -2 dx \\ \frac{y^2}{2} = -2x + C_1 \quad C_1 \in \mathbb{R} \\ y = \pm \sqrt{-4x + C_2}$$

6.2 Lineare Differentialgleichung

Eine lineare DGL der n-ten Ordnung hat folgende Form

$$a_0 y^{(0)} + \dots + a_n y^{(n)} = q(x)$$

Anmerkung

- i) $q(x)$ bezeichnet die Inhomogenität
- ii) Da die DGL linear ist, gilt für die Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

wobei y_h die homogene und y_p die partikuläre Lösung ist

6.2.1 Homogene Lösung ($q(x) = 0$)

1. Man setzt die Inhomogenität 0

$$a_0 y^{(0)} + \dots + a_n y^{(n)} = 0$$

2. Mit dem Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ folgt das charakteristische Polynom

$$\text{Chp}(\lambda) = a_0 \lambda^0 + a_1 \lambda^1 + \dots + a_n \lambda^n = 0$$

3. Nullstellen in den Ansatz einsetzen

- λ_i k-fache reelle Nullstelle

$$y_i(x) = x^0 e^{\lambda_i x}, \dots, y_{i+k}(x) = x^{k-1} e^{\lambda_i x}$$

- λ_i und λ_j reelle betragsmäßig gleiche Nullstelle ($\lambda = \pm a$)

$$y_i(x) = \cosh(ax), \quad y_j(x) = \sinh(ax)$$

- λ_i und λ_j komplexe Nullstelle ($\lambda = a \pm bi$)

$$y_i(x) = e^{ax} \cos(bx), \quad y_j(x) = e^{ax} \sin(bx)$$

4. Die einzelnen Teillösungen zusammensetzen ($C_i \in \mathbb{R}$)

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x)$$

6.2.2 Partikuläre Lösung

zuerst nur y_p einsetzen für konst.
dann: zusammen mit y_h wieder einsetzen

- Ansatz vom Typ der rechten Seite $q(x)$ muss folgende Form haben ($\mu \in \mathbb{R}$)

$$q(x) = (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m) e^{\mu x}$$

dann ist der Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \begin{cases} \frac{b_0}{\text{Chp}^{(k)}(\mu)} x^k e^{\mu x} & m = 0 \\ (C_0 + \dots + C_m x^m) x^k e^{\mu x} & m \neq 0 \end{cases}$$

Der Ansatz ($m \neq 0$) in die DGL einsetzen und mit einem Koeffizientenvergleich, die Koeffizienten $C_0, \dots, C_m$ berechnen

Anmerkungen

- i) k bezeichnet die Ordnung der NST von λ , falls $\lambda = \mu$
- ii) Falls die Inhomogenität $q(x) = q_1(x) + \dots + q_r(x)$ aus mehreren Termen besteht, kann man die einzelnen Lösungen der Terme berechnen und diese dann zusammenaddieren $y_p(x) = y_{p1}(x) + \dots + y_{pr}(x)$
- iii) Man kann $q(x)$ komplexifizieren ($q(x) = \cos(x) \rightarrow \mu = i$) für die partikuläre Lösung gilt $y_p(x) = \text{Re}(z_p(x))$ oder $\text{Im}(z_p(x))$
- iv) Wenn möglich der Ansatz vom Typ der rechten Seite anwenden (oder Ansatz Tabelle), sonst Variation der Konstanten

6.2.3 Anfangswertproblem (AWP)

Damit die Lösung der DGL eindeutig ist, müssen n-Anfangswerte für n-Freiheitsgrade gegeben sein $\rightarrow$ Konstanten $C_1, \dots, C_n$ bestimmen

Anmerkung

- i) Die Konstanten erst mit der kompletten Lösung $y(x)$ bestimmen (mit partikulärer Lösung)

Rechte Seite $q(x)$	Ansatz für $y_p(x)$
$C e^{ax}$	$A e^{ax}$
$C \cos(bx)$	$A \sin(bx) + B \cos(bx)$
$C \sin(bx)$	$A \sin(bx) + B \cos(bx)$
$C \cos(bx) e^{ax}$	$(A \sin(bx) + B \cos(bx)) e^{ax}$
$C \sin(bx) e^{ax}$	$(A \sin(bx) + B \cos(bx)) e^{ax}$
$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$	$A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0$
$(a_n x^n + \dots + a_0) e^{ax}$	$(A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0) e^{ax}$
$(a_n x^n + \dots + a_0) \sin(bx)$	$(A_n x^n + \dots + A_0) \sin(bx)$
$(a_n x^n + \dots + a_0) \cos(bx)$	$(A_n x^n + \dots + A_0) \cos(bx)$
$(a_n x^n + \dots + a_0) e^{ax} \sin(bx)$	$(A_n x^n + \dots + A_0) e^{ax} \sin(bx)$
$(a_n x^n + \dots + a_0) e^{ax} \cos(bx)$	$(A_n x^n + \dots + A_0) e^{ax} \cos(bx)$

	$\int_0^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
$\sin$	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
$\sin^2$	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin^3$	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
$\cos$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
$\cos^2$	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2+\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos^3$	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$\frac{4}{3}$	0
$\sin \cdot \cos$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$\sin^2 \cdot \cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$\sin \cdot \cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0

7 Integralrechnung

7.1 Integralrechnung einer Variablen

7.1.1 Riemannsche Summen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

Beispiel

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(akn + bn^2 \right)^{-\frac{1}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \left(akn + bn^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \left(\frac{ak}{n} + b \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx \end{aligned}$$

7.1.2 Partielle Integration

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

7.1.3 Substitution

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \underbrace{\frac{f(u)}{u'(x)}}_{dx} du \quad \frac{du}{dx} = u'(x) \quad \text{mit } dx = \frac{du}{u'(x)}$$

Anmerkungen

- i) Wenn die Stammfunktion gesucht ist, dann wird am Schluss wieder rücksubstituiert
- ii) Im Kapitel 10.5.1 auf Seite 8 findet man wichtige Substitutionen

7.1.4 Rationale Funktionen

• Reelle r-fache Nullstelle

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^r} dx = \begin{cases} \frac{A}{(1-r)(x-x_0)^{r-1}} + C & r > 1 \\ A \ln|x-x_0| + C & r = 1 \end{cases}$$

• Komplexe einfache Nullstelle ($b > a^2$)

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+2ax+b} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2+2ax+b) + \frac{B-aA}{\sqrt{b-a^2}} \arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right) + C$$

Anmerkung

- i) Das Integral kann mit quadratischer Ergänzung sowie mit geeigneten Substitutionen gelöst werden (Kapitel 10.5.1 Seite 8)

7.1.5 Uneigentliche Integrale

Sei $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$ und gilt $-\infty \leq a < \alpha < c < \beta < b \leq \infty$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow a} \int_{\alpha}^c f(x)dx + \lim_{\beta \rightarrow b} \int_c^{\beta} f(x)dx$$

7.1.6 Rotationskörper

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

7.2 Mehrdimensionale Integralrechnung

7.2.1 Satz von Fubini

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad f: Q \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_Q f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Anmerkung

- i) Die Integrationsreihenfolge spielt keine Rolle, falls die Funktion f auf dem Bereich Q stetig ist

7.2.2 Integrale über Normalbereiche (2-dim)

Sei $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ ein Normalbereich, dann gilt für das Integral

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\mathbf{0} = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} f(x, y) dy dx$$

Anmerkungen

- i) Die Integrationsreihenfolge ist wichtig
- ii) Für höhere Dimensionen bleibt das Prinzip das Gleiche

7.2.3 Transformationssatz (Substitution)

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ $\Phi: \Omega \rightarrow \Phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Diffeomorphismus und falls f auf $\Phi(\Omega)$ integrierbar ist, dann gilt

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\Omega} f(\Phi(\mathbf{x})) |\det(D\Phi(\mathbf{x}))| d\mathbf{x}$$

Anmerkungen

- i) Dabei bezeichnet $\det(D\Phi(\mathbf{x}))$ die Funktionaldeterminante von Φ und $D\Phi(\mathbf{x})$ die Jacobimatrix
- ii) Die Bedingung, dass Φ ein Diffeomorphismus sein muss, kann abgeschwächt werden

iii) Die allgemeine Funktionaldeterminante von $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist $\sqrt{\det((D\Phi(\mathbf{x}))^T \cdot D\Phi(\mathbf{x}))}$, wobei $\det(D\Phi(\mathbf{x})^T \cdot D\Phi(\mathbf{x}))$ die gram-sche Determinante von $D\Phi$ ist

iv) Falls $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist, dann gilt für die allgemeine Funktionaldeterminante von Φ (siehe Oberflächenintegrale)

$$\sqrt{\det((D\Phi(\mathbf{x}))^T \cdot D\Phi(\mathbf{x}))} = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right\|$$

v) Wichtige Parametrisierungen Φ sind im Kapitel 10.7 auf Seite 9 zu finden

7.2.4 Kurvenintegral

i) Kurvenintegral erster Art (über Skalarfeld)

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stückweise differenzierbarer Weg, dann ist das Integral von f über γ wie folgt definiert

$$\int_{\gamma} f(\mathbf{x}) ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\|_2 dt$$

ii) Kurvenintegral zweiter Art (über Vektorfeld)

Sei $\mathbf{K}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld und $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stückweise differenzierbarer Weg, dann ist das Integral von $\mathbf{K}$ über γ wie folgt definiert

$$\int_{\gamma} \mathbf{K}(\mathbf{x}) \cdot d\vec{s} := \int_a^b \mathbf{K}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

Anmerkungen

- i) Dieses Kurvenintegral bezeichnet man auch als Arbeitsintegral, wobei das Vektorfeld der Kraft entspricht (bspw. elektrisches Feld)
- ii) Das Integral eines Gradientenfeldes $\mathbf{K} = \nabla f$ ist wegunabhängig, d.h. nur der Anfangspunkt und der Endpunkt ist entscheidend. Man bezeichnet in diesem Fall f auch als Potential und $\mathbf{K}$ als konservatives Feld

7.2.5 Oberflächenintegral Bsp: über Kugel integrieren $\rightarrow r = \text{const.}$ $\rightarrow r$ keine Variable $\rightarrow$ nur dipole

i) Oberflächenintegral erster Art (über Skalarfeld)

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld und A eine Fläche die mit $\Phi: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($B \subseteq \mathbb{R}^2$) parametrisiert wird. Das Oberflächenintegral von f über A lautet

$$\iint_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{0} = \iint_B f(\Phi) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_2 du dv$$

ii) Oberflächenintegral zweiter Art (über Vektorfeld)

Sei $\mathbf{K}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld und A eine Fläche die mit $\Phi: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($B \subseteq \mathbb{R}^2$) parametrisiert wird. Das Oberflächenintegral von $\mathbf{K}$ über A lautet

$$\left(\iint_A \mathbf{K}(\mathbf{x}) \cdot d\vec{\sigma} \right) = \iint_A \mathbf{K}(\mathbf{x}) \cdot \vec{n} d\mathbf{0} = \iint_B \mathbf{K}(\Phi) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) du dv$$

Anmerkungen

- i) Dieses Integral wird auch häufig als Flussintegral bezeichnet
- ii) Im Allgemeinen besteht das (vektorielle) Flächenelement aus $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\mathbf{0}$, wobei das Einheitsnormalenfeld bezeichnet

7.2.6 Volumenintegral

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld, dann lautet das Volumenintegral (über das Volumen Ω) wie folgt

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mu$$

Anmerkungen

- Meistens spricht man von einem Volumenintegral, wenn man über ein 3-dimensionales Volumen integriert, aber grundsätzlich kann die Dimension auch höher sein
- Falls man das Volumen von Ω berechnen möchte, kann man als Skalarfeld die Indikatorfunktion ($f(x, y, z) = 1$ für $(x, y, z) \in \Omega$) wählen
- Das Volumenelement $d\mu$ berechnet sich mit einer geeigneten Parametrisierung $\Phi(\mathbf{x})$ (siehe Transformationssatz)

$$d\mu = |\det(D\Phi(\mathbf{x}))| d\mathbf{x}$$

7.2.7 Schwerpunkt

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Körper und bezeichne $S_k = (s_{x_1}, \dots, s_{x_n}) \in \mathbb{R}^n$ den Schwerpunkt von K , dann gilt

$$s_{x_i} = \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_K x_i d\mu$$

Anmerkung

- Symmetrien von K beachten $\rightarrow$ spart Zeit

8 Vektoranalysis

8.1 Skalarfeld

Jedem Punkt wird eine Zahl (Skalar) zugeordnet $\rightarrow$ Gradient wirkt auf ein Skalarfeld

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

8.2 Vektorfeld

Jedem Punkt wird ein Vektor zugeordnet

$$\mathbf{K}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \mathbf{K}(x) = \begin{pmatrix} K_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ K_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

8.2.1 Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes gibt die "Quellendichte" an (Skalarfeld)

$$\mathbf{K}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{div}(\mathbf{K}) = \nabla \cdot \mathbf{K} = \frac{\partial K_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial K_n}{\partial x_n}$$

8.2.2 Rotation

Falls $\mathbf{K}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dann gilt für die Rotation von $\mathbf{K}$

$$\text{rot}(\mathbf{K}) = \nabla \times \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial y} - \frac{\partial K_2}{\partial z} \\ \frac{\partial K_1}{\partial z} - \frac{\partial K_3}{\partial x} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ „2D-Rotation“

8.2.3 Identitäten

$$\text{div}(f \cdot \mathbf{K}) = \nabla f \cdot \mathbf{K} + f \cdot \text{div}(\mathbf{K})$$

$$\text{div}(\mathbf{K} \times \mathbf{L}) = \mathbf{L} \cdot \text{rot}(\mathbf{K}) - \mathbf{K} \cdot \text{rot}(\mathbf{L})$$

$$\text{rot}(\nabla f) = 0$$

$$\text{div}(\nabla f) = \Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \quad (\text{Laplace-Operator})$$

$$\text{div}(\text{rot}(\mathbf{K})) = 0$$

$$\text{div}(f \cdot \text{rot}(\mathbf{K})) = \nabla f \cdot \text{rot}(\mathbf{K})$$

8.2.4 Satz von Green (2d-Stokes)

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{K} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} \right) d\mu$$

Anmerkungen

- Das Umlaufintegral muss dabei mathematisch positive Umlaufrichtung haben
- Man kann so auch die Fläche von D , mithilfe eines Linienintegrals, berechnen

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \rightarrow \text{vol}(D) = \iint_D 1 dx dy = \oint_{\partial D} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{s}$$

8.2.5 Satz von Stokes (3-dim)

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Omega} \text{rot}(\mathbf{K}) \cdot d\vec{\mathbf{O}} = \int_{\Omega} \text{rot}(\mathbf{K}) \cdot \vec{n} d\mathbf{O}$$

$\hookrightarrow$ Flussintegral

Anmerkungen

- Nach Konvention lassen sich die Richtungen des (vektoriellen) Wegelements $d\vec{s}$ und des (vektoriellen) Flächenelements $d\vec{\mathbf{O}}$ gemäss der rechten-Hand-Regel bestimmen (der Daumen entspricht dem Einheitsnormalenfeld und die Finger beschreiben die Richtung des Weges)
- Falls nur $\text{rot}(\mathbf{K})$ gegeben ist, kann man durch raten ein passendes Vektorfeld $\mathbf{K}$ bestimmen

8.2.6 Satz von Gauss

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{K} \cdot \vec{n} d\mathbf{O} = \iiint_{\Omega} \text{div}(\mathbf{K}) d\mu$$

$\hookrightarrow$ Integration über Normalbereich
 $\hookrightarrow$ Flussintegral

9 Wichtige Sätze und Definitionen

9.1 Zwischenwertsatz

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann existiert ein $c \in [a, b]$ zu jedem $u \in [f(a), f(b)]$ (falls $f(a) \leq f(b)$) bzw. $u \in [f(b), f(a)]$ (falls $f(b) < f(a)$) mit $f(c) = u$

9.2 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar, dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

9.3 Konvexität

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Abbildung, dann ist $f(x)$ konvex auf $[a, b]$, wenn $\forall x, y \in [a, b]$ folgendes gilt

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$$

9.4 Diffeomorphismus

Seien $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine bijektive C^1 -Abbildung $\Phi: U \rightarrow V$ heisst Diffeomorphismus, falls die Umkehrabbildung $\Phi^{-1}: V \rightarrow U$ wieder C^1 ist.

9.5 Inverses Funktionentheorem

Sei $\varphi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Abbildung. Sei in $a \in U$ die Ableitung $\varphi' = d\varphi(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ invertierbar (also $\det(\varphi'(a)) \neq 0$). Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von a , so dass $V_0 = \varphi(U_0)$ eine offene Umgebung von $b = \varphi(a)$ ist und $\varphi|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ ein Diffeomorphismus (d.h. φ^{-1} ex. und ist C^1) ist. Ferner gilt

$$d(\varphi^{-1})(b) = (d\varphi(a))^{-1}$$

falls φ zweifach
bijektiv ist:
globaler Diffeomorphismus

9.6 Implizites Funktionentheorem

Sei $\mathbf{F}: U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ eine C^1 -Abbildung und sei $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ eine Nullstelle von $\mathbf{F}$, d.h. $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ mit $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U \times \mathbb{R}^m$. Sei $D\mathbf{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ eine invertierbare Matrix. Dann gibt es Umgebungen U' von $\mathbf{a}$ und U'' von $\mathbf{b}$, und eine C^1 -Abbildung $\mathbf{f}: U' \rightarrow U''$, so dass die Nullstellenmenge von $\mathbf{F}$ in $U' \times U''$ genau der Graph von $\mathbf{f}$ ist.

$$(\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U' \times U'') \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

invertierbar
falls nicht quadratisch
voller Rang

Ferner gilt

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = -(D\mathbf{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))^{-1} D\mathbf{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

falls quadratisch:
 $\det(D\mathbf{F}_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})) \neq 0$

9.7 Lokaler Existenzsatz (Picard-Lindelöf)

Betrachte das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad x(t_0) = x_0$$

mit $f(t, x)$ lipschitz-stetig im 2ten Argument und $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Die Folge

$$\begin{aligned} x^{[0]}(t) &= x_0 \\ &\vdots \\ x^{[l+1]} &= x_0 + \int_0^t f(s, x^{[l]}(s)) ds \end{aligned}$$

mit $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ konvergiert für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ gleichmässig gegen die Lösung $x(t)$

10 Addendum

10.1 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

10.1.1 Trigonometrische Grössen

Grad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

10.1.2 Identitäten

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\sin^n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos\left((n - 2k)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(x(n - 2k))$$

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\sinh(x) = -i \sin(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$

$$\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

$$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

$$\sinh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$$

$$\sinh(x)' = \cosh(x)$$

$$\tanh(x)' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

$$\operatorname{arcosh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\cosh(x)' = \sinh(x)$$

$$\operatorname{arsinh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\operatorname{artanh}(x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

10.4 Spezielle Ableitungen

Sei $f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow \omega$ multilinear, dann ist f differenzierbar und es gilt

$$df(a_1, \dots, a_n)(h_1, \dots, h_n) = f(h_1, a_2, \dots, a_n) + \dots + f(a_1, a_2, \dots, h_n)$$

Beispiele

$$\bullet d(X^T X)H = H^T X + X^T H$$

$$\bullet d(\det(X))H = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(X)H)$$

10.5 Integrale

10.5.1 Substitutionen

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx \quad u(x) = g(x) \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx \quad u(x) = g(x) \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$$

$$\int f(e^x, \sinh(x), \cosh(x)) dx \quad u(x) = e^x \quad dx = \frac{du}{e^x}$$

$$\int f(x, \sqrt{1 - x^2}) dx \quad x = \sin(u) \quad dx = \cos(u) du$$

$$\int f(x, \sqrt{1 + x^2}) dx \quad x = \sinh(u) \quad dx = \cosh(u) du$$

$$\int f(x, \sqrt{x^2 - 1}) dx \quad x = \cosh(u) \quad dx = \sinh(u) du$$

$$\int f\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) dx \quad u(x) = \frac{x}{a} \quad dx = a du$$

$$\int f\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) dx \quad u(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad dx = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} du$$

$$\int R(\sin(x), \cos(x)) dx \quad u(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad dx = \frac{2}{1 + u^2} du$$

$$\rightarrow \sin(x) = \frac{2u}{1 + u^2} \quad \rightarrow \cos(x) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

10.5.2 Potenzen und Wurzeln

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x) \right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin(x) + C$$

$$\int -\frac{1}{1 - x^2} dx = \arccos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan(x) + C$$

10.2 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln(1 + x)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos(x)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$

10.3 Wichtige Ableitungen

$$(a^x)' = \ln(a) a^x$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sqrt[n]{a})' = -\frac{a^{\frac{1}{n}} \ln(a)}{x^2}$$

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$\csc'(x) = -\csc(x) \cot(x)$$

$$\sec'(x) = \sec(x) \tan(x)$$

$$\cot'(x) = -\csc^2(x)$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

10.5.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen

$$\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k \ln(a)} + C \quad a > 1$$
$$\int \ln(x) dx = x (\ln|x| - 1) + C \quad x > 0$$
$$\int x^n e^{ax} dx = e^{ax} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{x^{n-k}}{a^{k+1}} + C$$

10.5.4 Hyperbolische Funktionen

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh}(x) + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh}(x) + C \quad x > 1$$
$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{artanh}(x) + C$$

10.5.5 Trigonometrische Funktionen

$$\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$$
$$\int \sin^2(x) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + C$$
$$\int \cos^2(x) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + C$$
$$\int \sin(x)\cos(x) dx = \frac{1}{2} \sin^2(x) + C$$
$$\int \sin^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(x) dx - \frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n}$$
$$\int \cos^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) dx + \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}$$
$$\int \cot(x) dx = \ln|\sin(x)| + C$$
$$\int \csc(x) dx = -\ln|\csc(x) + \cot(x)| + C$$
$$\int \sec(x) dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$$
$$\int \arcsin(x) dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$
$$\int \arccos(x) dx = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$$

10.6 Punktmengen

10.6.1 Kreis

Fläche: $A = \pi r^2$ Umfang: $U = 2\pi r$

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$

$r \in \mathbb{R}^{>0}$ ist der Radius des Kreises

10.6.2 Kugel

Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Oberfläche: $S = 4\pi r^2$

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}$$

$r \in \mathbb{R}^{>0}$ ist der Radius des Kreises

10.6.3 Kreiszylinder

Volumen: $V = \pi r^2 h$ Mantelfläche: $M = 2\pi r h$
Oberfläche: $S = M + 2 \cdot G = 2\pi r h + 2\pi r^2$

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \quad 0 \leq z \leq h\}$$

$r \in \mathbb{R}^{>0}$ ist der Radius des Kreiszylinders

10.6.4 Kegel

Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ Oberfläche: $S = \pi r^2 + \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \frac{r^2}{h^2}(h - z)^2\}$$

$r, h \in \mathbb{R}^{>0}$ ist der Radius bzw. die Höhe des Kegels

10.6.5 Ellipse

$a, b \in \mathbb{R}^{>0}$ bezeichnet die Halbachsen der Ellipse

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\}$$

10.6.6 Ellipsoid

$a, b, c \in \mathbb{R}^{>0}$ bezeichnet die Halbachsen des Ellipsoides

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1\}$$

10.6.7 Elliptisches Paraboloid

$a, b \in \mathbb{R}^{>0}$ bezeichnet die Halbachsen der elliptischen Querschnitte

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = z - z_0, \quad z > z_0\}$$

10.6.8 Torus

$r, R \in \mathbb{R}^{>0}$ bezeichnen $r < R$ die Radien des Torus

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - R \right)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}$$

Anmerkungen

- i) Die Gleichungen beschreiben nur die Randpunkte ∂P der Punktmengen P (sonst $\leq$)
- ii) Die Zahlen x_0, y_0, z_0 beschreiben jeweils die Translation in die jeweilige Achsenrichtung (meistens 0)

10.7 Parametrisierungen

10.7.1 Polarkoordinaten

$$\Phi: (0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$
$$\det(D\Phi(r, \varphi)) = r$$

Anmerkung

- i) Falls man eine Ellipse parametrisieren möchte, dann wählt man für die Parametrisierung $\Phi(\varphi) = (a \cos(\varphi), b \sin(\varphi))^T$, wobei a und b die Halbachsen der Ellipse beschreiben

10.7.2 Zylinderkoordinaten

$$\Phi: (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \Phi(r, \varphi, h) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$$
$$\det(D\Phi(r, \varphi, h)) = r$$

10.7.3 Kugelkoordinaten

$$\Phi: (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \Phi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ r \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$
$$\det(D\Phi(r, \varphi, h)) = r^2 \sin(\vartheta)$$

Anmerkungen

- i) ϑ ist der Polarwinkel und ist der Winkel zwischen der Polrichtung und dem Punkt P auf der Kugeloberfläche
- ii) φ ist der Azimutwinkel und der gleiche Winkel wie bei den Polar- bzw. Zylinderkoordinaten

10.7.4 Reguläre Flächen

Eine reguläre Fläche ist eine 2-dimensionale, differenzierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ (Kapitel ??, Seite ??). Lässt sich diese Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ durch eine differenzierbare Funktion $f: I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = z$ beschreiben, dann gilt für die Parametrisierung Φ von S

$$\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \Phi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

Anmerkungen

- i) Diese Parametrisierung braucht man häufig zur Berechnung von Oberflächenintegralen (Integralsatz von Gauss/Stokes)
- ii) Die allgemeine Funktionaldeterminante von $\Phi(x, y)$ lässt sich folgendermassen berechnen (Siehe Kapitel 7.2.3 auf Seite 6)

$$\sqrt{\det((D\Phi(x, y))^T \cdot D\Phi(x, y))} = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\|$$

10.8 Lineare Algebra (wichtige Formeln)

10.8.1 Inverse (2x2-Matrizen)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

10.8.2 Definitheit von Matrizen

- Möglichkeit I (2x2-Matrizen)

Eigenwerte λ_i mit $\det(A - \lambda_i I_n) \stackrel{!}{=} 0$

- $\lambda_i > 0$ positiv definit (semi bei $\geq$)
- $\lambda_i < 0$ negativ definit (semi bei $\leq$)
- $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0$ indefinit

- Möglichkeit II (3x3-Matrizen)

Hauptminoren A_i berechnen

$$A_i = \det \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

- $A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_n > 0 \rightarrow$ positiv definit
- $A_1 < 0, A_2 > 0, \dots \rightarrow$ negativ definit
- Kein Muster $\rightarrow$ indefinit

Existenz von Potentialen

Sei $\vec{v}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

• Ω einfach zsmh., $\text{rot}(\vec{v}) \neq 0$
 $\Rightarrow \vec{v}$ hat kein Potential

• Ω einfach zsmh., $\text{rot}(\vec{v}) = 0$
 $\Rightarrow \vec{v}$ hat ein Potential

• Ω nicht einfach zsmh., $\text{rot}(\vec{v}) \neq 0$
 $\Rightarrow \vec{v}$ hat kein Potential

• Ω nicht einfach zsmh., $\text{rot}(\vec{v}) = 0$
 $\Rightarrow$ keine Aussage!

$\rightarrow$ entweder: finde γ geschlossen mit
 $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} \neq 0 \Rightarrow$ kein Potential

oder: bestimme Potential durch raten

„Ableitung von einem Integral“

Sei $H(v)$ die Stammf. von $h(v)$

$$\begin{aligned} \int_{u(x)}^{o(x)} h(v) dv &= [H(v)]_{u(x)}^{o(x)} \\ &= H(o(x)) - H(u(x)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\int_{u(x)}^{o(x)} h(v) dv \right) = o'(x) h(o(x)) - u'(x) h(u(x))$$

Vorgehen bei Diffeomorphismen

gegeben

$$\Phi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

Frage

ist Φ ein (globaler) Diffeomorphismus?

Schritt 1

Zeige: $\Phi \in C^1$ und $\det(d\Phi(x)) \neq 0 \quad \forall x \in U$

UNKGHR-
SATZ

$\Rightarrow \Phi$ ist (mindestens) ein lokaler Diffeom.

Schritt 2

falls Φ zusätzlich bijektiv auf V ist,

dann ist Φ ein globaler Diffeomorphismus

Additionstheoreme [S.99]

Allgemeines

$$\begin{aligned}\cos(x \pm \frac{\pi}{2}) &= \mp \sin(x) & \sin(\frac{\pi}{2} \pm x) &= \cos(x) \\ \tan(a) \pm \tan(b) &= \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cos(b)} & \sin(x - \frac{\pi}{2}) &= -\cos(x) \\ 1 - \cos(x) &= 2 \sin^2(\frac{x}{2}) & \cos(x) &= 2 \cos^2(\frac{x}{2}) - 1 \\ \tan(x + \frac{\pi}{4}) &= \frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)} & \tan(x + \frac{\pi}{4}) &= \frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)} \\ \cos(a) - \sin(a) &= \sqrt{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - a) & &= \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + a)\end{aligned}$$

2a und 3a

$$\begin{aligned}\triangleright \sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x) \quad \left| \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \right| \\ \triangleright \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2 \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 \\ \triangleright \sin(3x) &= 3 \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x) \\ \triangleright \cos(3x) &= \cos^3(x) - 3 \sin^2(x) \cos(x) \\ \triangleright \sin(x \pm y) &= \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \\ \triangleright \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \\ \triangleright \arcsin(x) + \arccos(x) &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

cot

$$\begin{aligned}1 + \cot^2(x) &= \frac{1}{\sin^2(x)} & \cot(a \pm b) &= \frac{\cot(a) \cot(b) \mp 1}{\cot(a) \pm \cot(b)} \\ \cot(2a) &= \frac{\cot^2(a) - 1}{2 \cot(a)} & \cot &= \frac{-1}{\sin^2(x)}\end{aligned}$$

$\frac{a}{2}$

$$\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(a))} \quad \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(a))}$$

Potenzen

$$\begin{aligned}\sin^2(a) &= \frac{1}{2} (1 - \cos(2a)) & \sin^3(a) &= \frac{1}{4} (3 \sin(a) - \sin(3a)) \\ \sin^4(a) &= \frac{1}{8} (\cos(4a) - 4 \cos(2a) + 3) \\ \cos^2(a) &= \frac{1}{2} (1 + \cos(2a)) & \cos^3(a) &= \frac{1}{4} (3 \cos(a) + \cos(3a)) \\ \cos^4(a) &= \frac{1}{8} (\cos(4a) + 4 \cos(2a) + 3)\end{aligned}$$

Hyperbolische Funktionen [S.60]

Allgemeines

$$\begin{aligned}\coth(x) &= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} & \tanh(a \pm b) &= \frac{1}{\coth(a \pm b)} = \frac{\tanh(a) \pm \tanh(b)}{1 \pm \tanh(a) \tanh(b)} \\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \\ 2a \text{ und } 3a &[S.99] \\ \text{Meist gleich wie } \sin, \cos, \dots \\ \cosh(2x) &= \cosh^2(x) + \sinh^2(x)\end{aligned}$$

$\frac{a}{2}$

$$\sinh\left(\frac{a}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{\cosh(a) - 1}{2}}, \quad (a \geq 0) \quad \cosh\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(a) + 1}{2}}$$

Summen

$$\begin{aligned}\sinh(a) + \sinh(b) &= 2 \sinh\left(\frac{a+b}{2}\right) \cosh\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sinh(a) - \sinh(b) &= 2 \sinh\left(\frac{a-b}{2}\right) \cosh\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \cosh(a) + \cosh(b) &= 2 \cosh\left(\frac{a+b}{2}\right) \cosh\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ 165 \quad \cosh(a) - \cosh(b) &= 2 \sinh\left(\frac{a+b}{2}\right) \sinh\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \tanh(a) \pm \tanh(b) &= \frac{\sinh(a \pm b)}{\cosh(a) \cosh(b)}\end{aligned}$$

Spezielle Ableitungen

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1 & \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} [S.65] \\ \tanh'(x) &= \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) \\ \triangleright \arccos'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \triangleright \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \triangleright \operatorname{Arccosh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} & \triangleright \operatorname{Arsinh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ \triangleright \operatorname{Artanh}'(x) &= \frac{1}{1-x^2} \\ \triangleright \ln(x)' &= \frac{1}{x} & (x^x)' &= (1 + \ln(x)) \cdot x^x \\ \triangleright (a^x)' &= \ln(a) \cdot a^x & \triangleright \sqrt{\ln(x)}' &= \frac{1}{2x \cdot \ln(x)} \\ (x^x)' &= (e^{x \cdot \ln(x)})' = \left(\frac{x}{x} + \ln(x)\right) \cdot e^{x \cdot \ln(x)} = (1 + \ln(x)) \cdot x^x \\ \triangleright (x e^x)' &= e^x + x e^x\end{aligned}$$

Produkte

$$\begin{aligned}\sinh(a) \sinh(b) &= \frac{1}{2} [\cosh(a+b) - \cosh(a-b)] \\ \cosh(a) \cosh(b) &= \frac{1}{2} [\cosh(a+b) + \cosh(a-b)] \quad [\text{Auch gültig für } \cos] \\ \sinh(a) \cosh(b) &= \frac{1}{2} [\sinh(a+b) + \sinh(a-b)] \\ \tanh(a) \tanh(b) &= \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{\cosh(a) + \cosh(b)}\end{aligned}$$

Potenzen

$$\begin{aligned}\sinh^2(a) &= \frac{1}{2} (\cosh(2a) - 1) & \sinh^3(a) &= \frac{1}{4} (\sinh(3a) - 3 \sinh(a)) \\ \sinh^4(a) &= \frac{1}{8} (\cosh(4a) - 4 \cosh(2a) + 3) \\ \cosh^2(a) &= \frac{1}{2} (\cosh(2a) + 1) & \cosh^3(a) &= \frac{1}{4} (\cosh(3a) + 3 \cosh(a)) \\ \cosh^4(a) &= \frac{1}{8} (\cosh(4a) + 4 \cosh(2a) + 3)\end{aligned}$$

Formel von Moivre

$$(\cosh(a) \pm \sinh(a))^n = \cosh(na) \pm \sinh(na), \quad n \geq 2$$

Spezielle Zusammenhänge

Inverse der trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned}\cos(\arcsin(x)) &= \sqrt{1-x^2} & \triangleright \sin(\arccos(x)) &= \sqrt{1-x^2} \\ \triangleright \sin(\arctan(x)) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} & \cos(\arctan(x)) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ \tan(\arccos(x)) &= \frac{1}{x} \cdot (1-x)^{1/4} & \tan(\arcsin(x)) &= x \cdot (1-x)^{-1/4} \\ \triangleright \operatorname{Arsinh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) & \triangleright \operatorname{Arccosh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \\ \operatorname{Artanh}(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1 & \operatorname{Arcoth}(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| > 1 \\ \sinh(\operatorname{Arccosh}(x)) &= \sqrt{x^2-1}, \quad x > 0 & \cosh(\operatorname{Arsinh}(x)) &= \sqrt{x^2+1} \\ \sinh(2 \cdot \operatorname{Arsinh}(x)) &= 2x \sqrt{x^2-1}\end{aligned}$$

diese Seite ist von
„bmicha“ (MAVT)

Topologie

offener Ball

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\}$$

innere, äussere, Randpunkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

- x_0 ist innerer Punkt $\Leftrightarrow \exists r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset \Omega$
- x_0 ist äusserer Punkt $\Leftrightarrow x_0$ ist innerer Punkt von $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$
- x_0 ist ein Randpunkt $\Leftrightarrow x_0$ ist weder innerer noch äusserer Punkt
 $\Leftrightarrow \forall r > 0 \quad \exists x_i$ inner Punkt von Ω und $\exists x_a$ äusserer Punkt von Ω
mit $x_i, x_a \in B_r(x_0)$
 $\Leftrightarrow x_0 \in \partial\Omega$

offene Menge

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist offen $\Leftrightarrow \forall x \in \Omega$ gilt: x ist ein innerer Punkt von Ω

abgeschlossene Menge

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow \Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ ist offen

$\Leftrightarrow \forall$ konvergente Folgen x_n mit $x_n \in \Omega \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \in \Omega$ „Grenzwert muss in der Menge sein“

Abschluss, inner, Rand

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

• Abschluss $\bar{\Omega} = \bigcap A$ mit $A \subset \Omega$ und A abgeschlossen

$$= \{x \in \Omega \mid x \text{ ist innerer Punkt oder Randpunkt}\}$$

• Innere $\mathring{\Omega} = \{x \in \Omega \mid \exists r > 0, B_r(x) \subset \Omega\} = \{x \in \Omega \mid x \text{ ist innerer Punkt}\}$

• Rand $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \mathring{\Omega} = \{x \in \Omega \mid x \text{ ist ein Randpunkt}\}$

$$\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \mathring{\Omega} \Leftrightarrow \bar{\Omega} = \mathring{\Omega} \cup \partial\Omega \Leftrightarrow \mathring{\Omega} = \bar{\Omega} \setminus \partial\Omega$$

Schnitte / Vereinigungen für offene Mengen

Sei $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ offen $\forall i \in I$ ($\mathbb{R}^n$ und $\emptyset$ sind offen)

- $\Omega_1 \cap \Omega_2$ ist offen für endliche Schnitte
- $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ ist offen sogar für unendliche Vereinigungen

Schnitte / Vereinigungen für abgeschlossene Mengen

Sei $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\forall i \in I$ ($\mathbb{R}^n$ und $\emptyset$ sind abgeschlossen)

- $\Omega_1 \cup \Omega_2$ ist abgeschlossen für endliche Vereinigungen
- $\bigcap_{i \in I} \Omega_i$ ist abgeschlossen sogar für unendliche Schnitte

Satz von Heine - Borel

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Leftrightarrow \Omega$ abgeschlossen & beschränkt

$X = f^{-1}\{U\}$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow U$ abgeschlossen & f ist stetig

„Wichtige Regeln der Topologie“

• $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$	$\overline{[0,1]} = [0,1]$	$\bar{\emptyset} = \emptyset$ $\bar{\emptyset} = \emptyset$ $\partial \emptyset = \emptyset$	$\overline{[-1,1] \setminus \{0\}} = [-1,1]$ $\overline{[-1,1] \setminus \{0\}} = (-1,0) \cup (0,1)$ $\partial([-1,1] \setminus \{0\}) = \{-1,0,1\}$
• $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$	$\overset{\circ}{[0,1]} = (0,1)$ $\partial[0,1] = \{0,1\}$		

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$	$\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$	$\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$	$\overset{\circ}{\bar{A}} = \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$
$\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$	$\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$	$\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\bar{A}}$	$\bar{\overset{\circ}{A}} = \bar{\overset{\circ}{\bar{A}}}$
$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$	$\partial \mathbb{N} = \mathbb{N}$		

relativ offen / relativ Abgeschlossen

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset X$ dann gilt:

Ω ist relativ offen auf $X \Leftrightarrow \exists O \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\Omega = O \cap X$

Ω ist relativ abgeschl. auf $X \Leftrightarrow \exists A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschl. mit $\Omega = A \cap X$