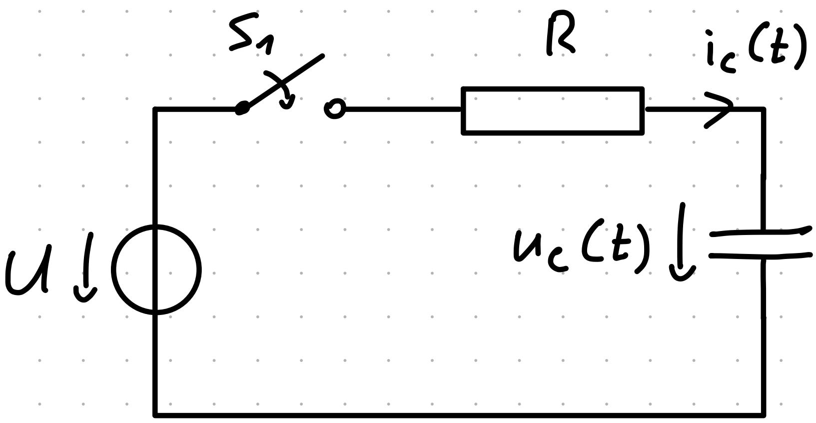
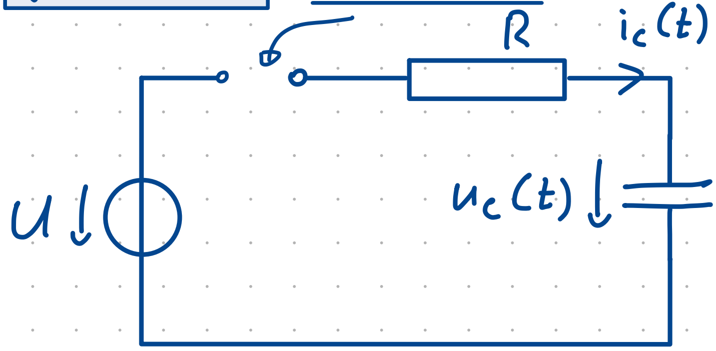
Extra – Crashkurs DGL



Der Schalter S_1 schliesst bei $t=0$.
Wie sieht $u_c(t)$ aus?

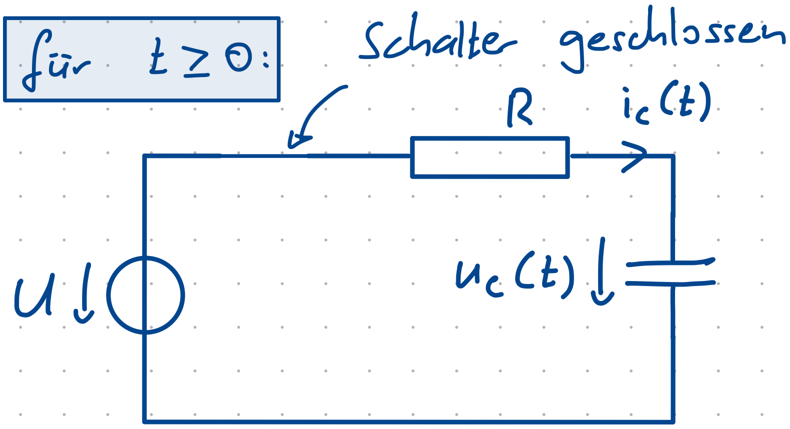
Lösung:

$\boxed{\text{für } t<0:}$ LEERLAUF



$\Rightarrow u_c(0) = \underbrace{u_{c,0}}_{\text{Anfangsbedingung (gegeben)}}$ ← für $t<0$

für $t \geq 0$:



es gilt: $i_c(t) = C \frac{d}{dt} u_c(t)$

Maschengleichung: $U = u_R(t) + u_c(t)$

$$= R\, i_c(t) + u_c(t)$$

$$= RC \frac{d}{dt} u_c(t) + u_c(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} u_c(t) + \frac{1}{RC} u_c(t) = \frac{U}{RC} \qquad \leftarrow \text{für } t \geq 0$$

$\Rightarrow$ wir müssen das folgende Anfangswertproblem (AWP) lösen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \frac{d}{dt} u_c(t) + \frac{1}{RC} u_c(t) = \frac{U}{RC} & \text{(inhomogene DGL)} \\ \text{mit} \quad u_c(0) = u_{c,0} & \text{(Anfangsbedingung)} \end{array}}$$

wir suchen eine homogene Lösung ($u_{c,h}(t)$) und eine partikuläre Lösung ($u_{c,p}(t)$) damit gilt:

$$u_c(t) = u_{c,h}(t) + u_{c,p}(t)$$

homogene Lösung finden:

1. $$\frac{d}{dt} u_{c,h}(t) + \frac{1}{RC} u_{c,h}(t) = 0$$

wir setzen rechte Seite zu Null für $u_{c,h}(t)$

2. finde eigenwert(e)

$$\underbrace{Chp(\lambda)}_{\text{Notation...}} = \lambda + \frac{1}{RC} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{RC}$$

3. Schreibe $u_{c,h}(t)$ als $\sum_i C_i e^{\lambda_i t}$

gilt nur falls alle λ verschieden

$$u_{c,h}(t) = C e^{-\frac{1}{RC} t}$$

bestimmen wir erst wenn wir $u_{c,p}(t)$ auch kennen

partikuläre Lösung finden:

$$\frac{d}{dt} u_{c,p}(t) + \frac{1}{RC} u_{c,p}(t) = \frac{U}{RC} \quad (*)$$

1. Ansatz wählen

rechte Seite ist konstant!

$\Rightarrow$ unser Ansatz ist eine Konstante (A)

Name egal aber Achtung: C haben wir schon verwendet

$$u_{c,p}(t) = A$$

2. Ansatz einsetzen in $(*)$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} A}_{0} + \frac{1}{RC} A = \frac{A}{RC} \stackrel{!}{=} \frac{U}{RC} \Rightarrow \underline{A = U}$$

partikuläre und homogene Lösung zusammen

1. $u_c(t) = u_{c,h}(t) + u_{c,p}(t)$

$$u_c(t) = Ce^{-\frac{1}{RC}t} + U$$

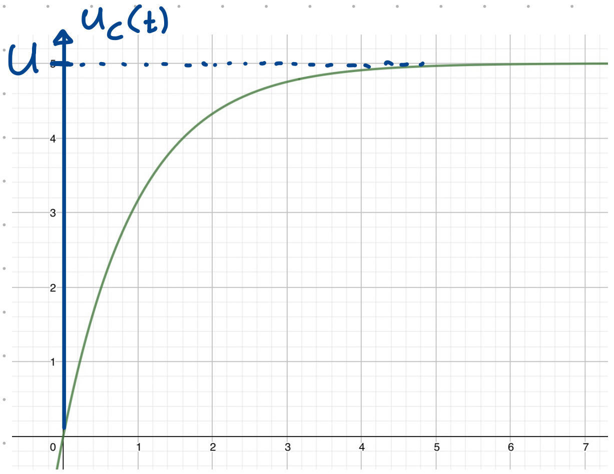
2. Anfangsbedingung verwenden.

$$u_c(0) = Ce^{0} + U = C + U \overset{!}{=} u_{c,0}$$

$$\Rightarrow C = u_{c,0} - U$$

3. Endresultat:

$$u_c(t) = Ce^{-\frac{1}{RC}t} + U = (u_{c,0} - U)e^{-\frac{1}{RC}t} + U$$



Schlussfolgerungen:

- Der Kondensator lädt sich zu $u_c(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} U$ auf
- für grosse C dauert das länger
- die partikuläre Lösung ist die Lösung für $t \to \infty$
  ↳ die können wir mit Nus 1 / Wechselstromrechnung finden !!!