ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Netzwerke und Schaltungen II

Übung 7
Maschenstromverfahren

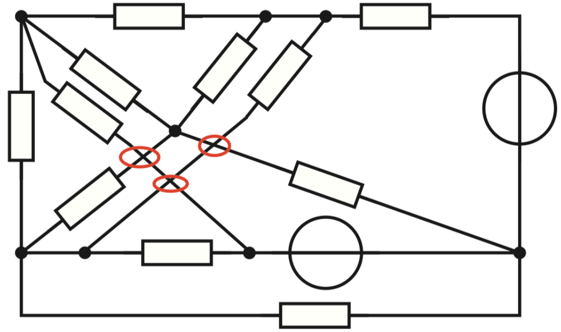
THEORIE FÜR DIE ÜBUNG

Analyse von Netzwerken

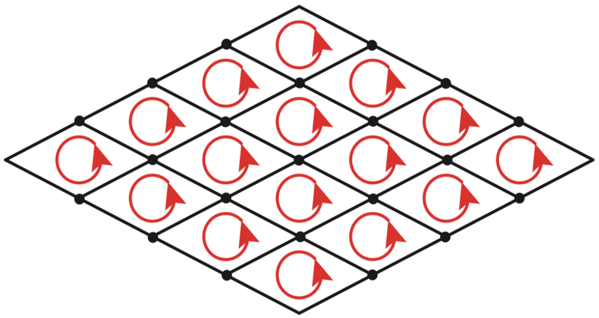
- Berechnung von Strömen und Spannungen in einem elektrischen Netzwerk
- Definition eines *Netzwerkes*:
  - Irgendeine Zusammenschaltung von Netzwerkelementen
  - Zusammenschaltung an deren Klemmen
  - Verbindungsstellen werden *Knoten* genannt
  - Teile zwischen jeweils zwei Knoten werden *Zweige* genannt

Klassifizierung von Netzwerken

- Nicht-kreuzungsfreie Netzwerke
- Kreuzungsfreie (ebene) Netzwerke
  - Zweige des Netzwerks schneiden sich nur in Knoten
  - Treten in der Praxis häufig auf



Nicht-kreuzungsfreies Netzwerk

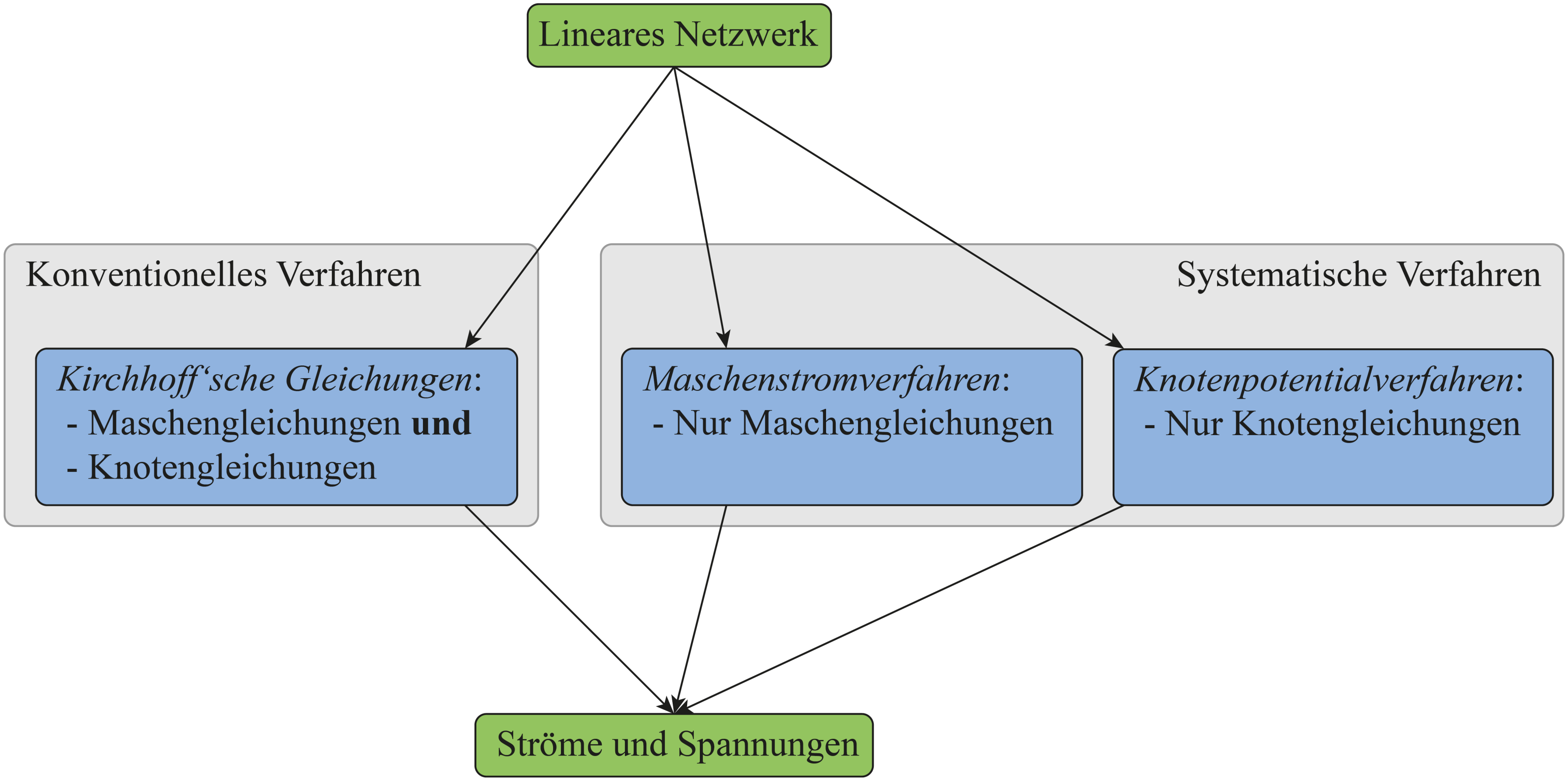


Kreuzungsfreies (ebenes) Netzwerk

Klassifizierung von Netzwerkelementen

- Lineare Netzwerkelemente:
  - Widerstand
  - Induktivität
  - Kapazität
  - Unabhängige Quellen
  - Gesteuerte (abhängige) Quellen
  - Transformator (Übertrager)
- Nicht-lineare Netzwerkelemente (werden hier nicht behandelt)

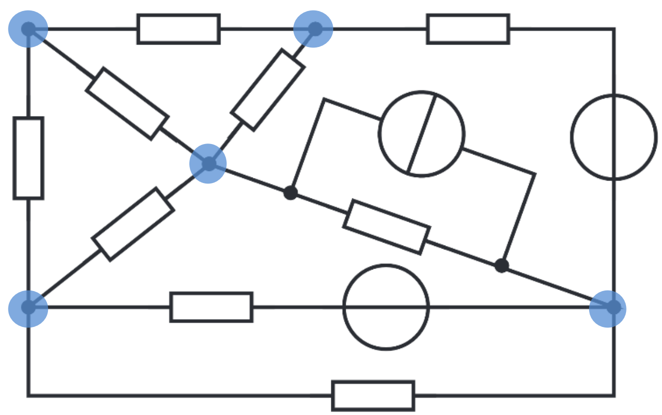
Analyseverfahren von Netzwerken



Konventionelles Verfahren

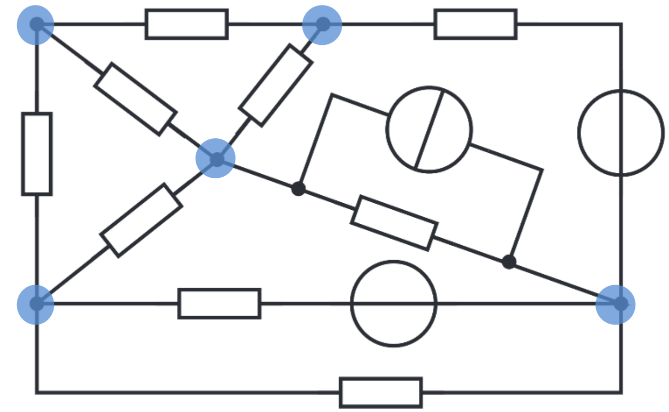
- <u>Gegeben:</u> Netzwerk mit K Knoten und Z Zweigen.
- Für die Berechnung der Z Zweiggrössen müssen
  - $K-1$ linear unabhängige Knotengleichungen **und**
  - $Z-(K-1)$ linear unabhängige Maschengleichungen aufgestellt werden.

- Beispielnetzwerk:
  - Netzwerk mit $K=5$ Knoten und $Z=9$ Zweigen
  - Konventionelles Verfahren: 9 Gleichungen



Konzept des Maschenstromverfahrens

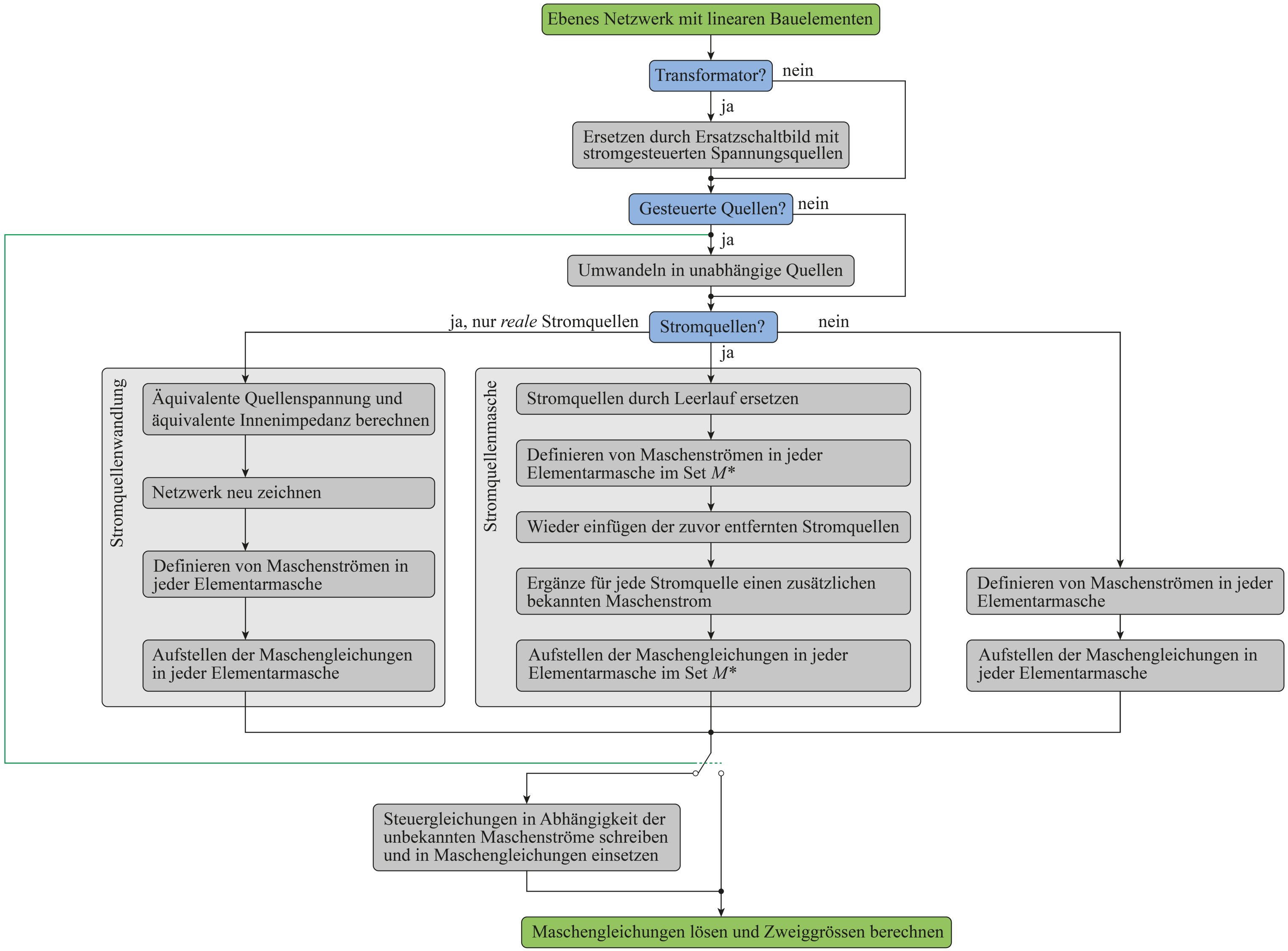
- Anzahl Gleichungen durch das Einführen von virtuellen *Maschenströmen* reduzieren.
- Diese Maschenströme werden in den *linear unabhängigen Maschenumläufen* des Netzwerks definiert.
- Die Maschenströme erfüllen die Knotengleichungen von vornherein, da sie jeweils in einen Knoten hinein- und wieder hinausfliessen.
- Es müssen nur noch $Z - (K - 1)$ Maschengleichungen aufgestellt werden.
- Beispielnetzwerk:
  - Netzwerk mit $K = 5$ Knoten und $Z = 9$ Zweigen
  - Konventionelles Verfahren: 9 Gleichungen
  - **Maschenstromverfahren: 5 Gleichungen**



Identifizierung unabhängiger Maschen

- Wie können die unabhängigen Maschen des Netzwerks ermittelt werden?
- *Elementarmaschen*:
  - Einfaches Verfahren für die in der Praxis häufig auftretenden ebenen Netzwerke.
  - Elementarmaschen sind alle Maschen, in deren Inneren sich keine Zweige befinden.
- *Vollständiger Baum*:
  - Formalisiertes Vorgehen für allgemeine Netzwerke (nicht-kreuzungsfreie und ebene Netzwerke)
  - Findet vor allem Anwendung in Berechnungsprogrammen. In der Praxis nicht geeignet.

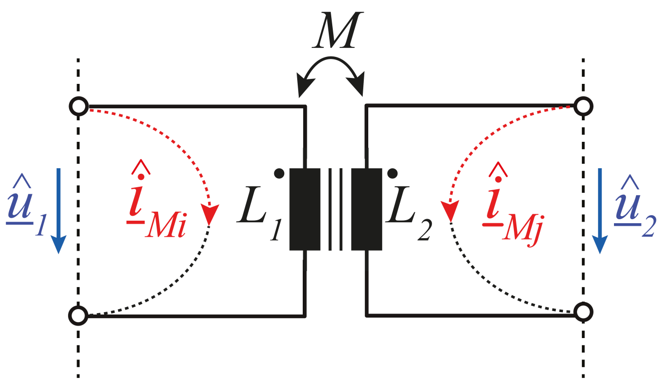
Kochrezept für ebene Netzwerke in Flowchart-Form



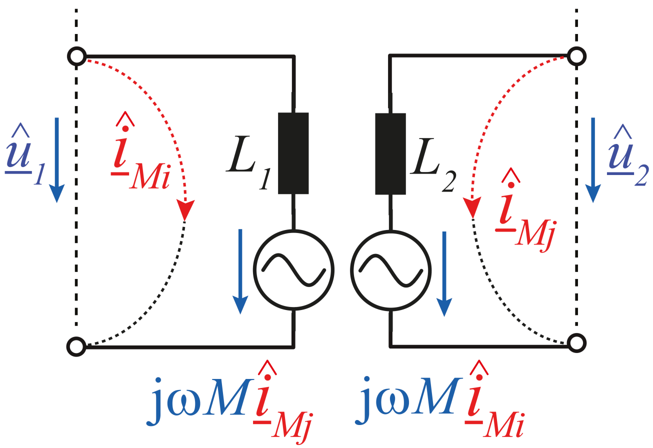
- Jede Transformatorseite wie einen separaten Netzwerkzweig behandeln
- Die entsprechenden Zweigspannungen $\underline{\hat{u}}_1$ und $\underline{\hat{u}}_2$ setzen sich zusammen aus:
  - Spannungsabfall über Selbstinduktivitäten L_1 und L_2, sowie
  - Induzierte Spannungen $\underline{\hat{u}}_{ind,1}$ und $\underline{\hat{u}}_{ind,2}$ aufgrund der magnetischen Kopplung (Kopplungsinduktivität M) zwischen den Spulen

$$\underline{\hat{u}}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \underline{\hat{\imath}}_{Mi} + \underline{\hat{u}}_{ind,1} \qquad \underline{\hat{u}}_{ind,1} = \mathrm{j}\omega M \underline{\hat{\imath}}_{Mj}$$

$$\underline{\hat{u}}_2 = \mathrm{j}\omega L_2 \underline{\hat{\imath}}_{Mj} + \underline{\hat{u}}_{ind,2} \qquad \underline{\hat{u}}_{ind,2} = \mathrm{j}\omega M \underline{\hat{\imath}}_{Mi}$$



Ersatzschaltung des Transformators



Gesteuerte Quellen

- Gesteuerte Quellen vor dem Aufstellen der Maschengleichungen in unabhängige Quellen umwandeln.
- Maschengleichungen aufstellen
- Steuergleichungen in Abhängigkeit der Maschenströme ausdrücken.
- Anschliessend Steuergleichungen in Maschengleichungen einsetzen und nach Maschenströmen auflösen.

Stromquellen

- Stromquellen müssen beim Maschenstromverfahren speziell behandelt werden
- *Stromquellenmasche*:
  - Bevorzugte Variante, weil anwendbar für reale und ideale Stromquellen
  - Stromquellen aus Netzwerk entfernen (durch Leerläufe ersetzen).
  - Übrig bleibt ein reduziertes Set M^* an Elementarmaschen
  - In diesem Set M^* die Maschenströme definieren
  - Stromquellen wieder hinzufügen und je einen zusätzlichen, bekannten Maschenstrom definieren, der über die jeweilige Stromquelle verläuft.
  - Dieser zusätzliche Maschenstrom ist dabei gleich dem Strom der jeweiligen idealen Stromquelle.
- *Stromquellenwandlung*:
  - Umwandeln einer realen Stromquelle in eine äquivalente Ersatzspannungsquelle.
  - Für ideale Stromquellen nur anwendbar nach einer aufwändigen Quellenteilung und –versetzung.

Maschengleichungen lösen

- Mögliche Varianten das Gleichungssystem nach den Maschenströmen aufzulösen:
  - Einsetzungsverfahren
  - Elementare Zeilenumformungen (Gauss’sches Eliminationsverfahren)
  - Matrixlösung
- Anhand der berechneten Maschenströmen können anschliessend die gesuchten Zweiggrössen ermittelt werden.

Ausblick nächste Übung

- Knotenpotentialverfahren
- <u>Analoge Idee:</u> Anzahl Gleichungen durch das Einführen von *Knotenspannungen* zu reduzieren…

BEISPIELAUFGABE

Aufgabe 1 Maschenstromverfahren

Gegeben sei das Netzwerk in Abbildung 1 mit der Spannungsquelle $\underline{\hat{u}}_{\mathrm{q1}}$, der Stromquelle $\underline{\hat{i}}_{\mathrm{q2}}$ sowie den Widerständen R, $2R$, $3R$ und $4R$. Berechnen Sie den Zweigstrom $\underline{\hat{i}}_2$ in Abhängigkeit von $\underline{\hat{u}}_{\mathrm{q1}}$, $\underline{\hat{i}}_{\mathrm{q2}}$ und R mit Hilfe des Maschenstromverfahrens.

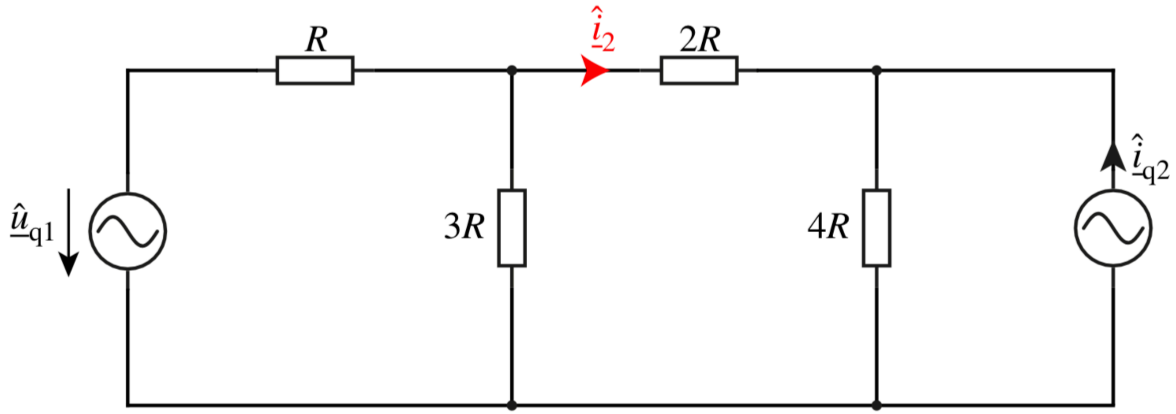


Abbildung 1: Mittels Maschenstromverfahren zu analysierendes Netzwerk. Gesucht ist der Zweigstrom $\underline{\hat{i}}_2$.

Aufgabe 2 Maschenstromverfahren mit gesteuerter Quelle

Gegeben sei das Netzwerk in Abbildung 2 mit der Spannungsquelle $\underline{\hat{u}}_{\mathrm{q1}}$ und der stromgesteuerten Stromquelle $\underline{\hat{i}}_{\mathrm{q2}} = \beta\underline{\hat{i}}_3$, sowie den Impedanzen $\underline{Z}_n$ mit $n \in [1, 2, 3, 4]$. Stellen Sie die dazugehörigen Maschengleichungen in Matrixform auf.

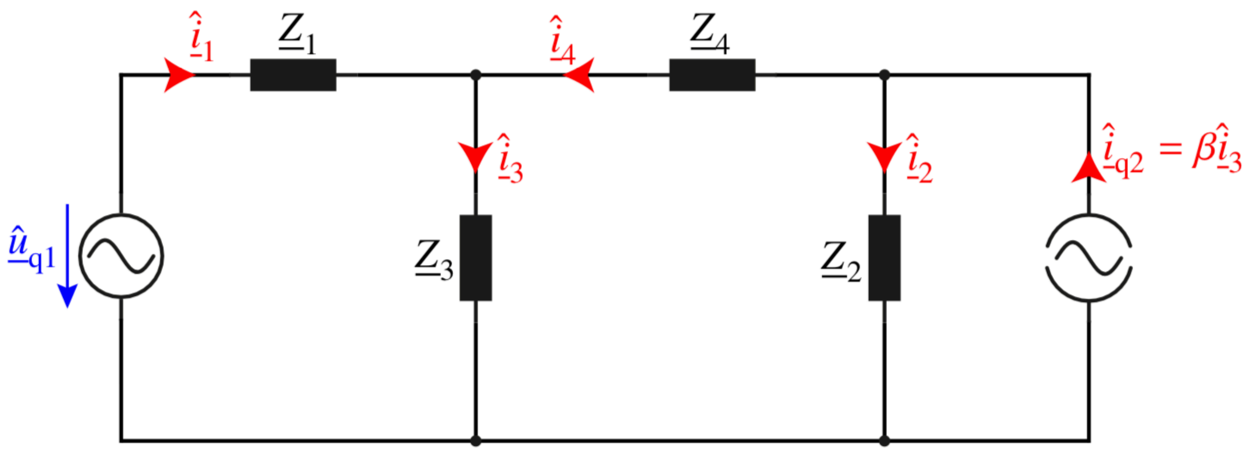


Abbildung 2: Mit dem Maschenstromverfahren zu analysierendes Netzwerk bestehend aus den Impedanzen $\underline{Z}_n$ mit $n \in [1, 2, 3, 4]$, der Konstantspannungsquelle $\underline{\hat{u}}_{\mathrm{q1}}$ und der stromgesteuerten Stromquelle $\underline{\hat{i}}_{\mathrm{q2}} = \beta\underline{\hat{i}}_3$.

Kahoot!

Tipps für Serie 7

(sorry für die schräge Schrift ü)

1. Wenn ihr die Gleichungen in Matrixform habt, braucht ihr nur einen Maschenstrom, um $\hat{u}_L$ zu berechnen.
→ Ihr müsst nicht alle Elemente der Inverse berechnen

1. und 2. (Allgemein)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

Überlegt euch gut, welche Elemente ihr braucht!

Mit den Matrixinversen gehts immer einfacher als mit „Einsetzen"/gaussen

Unterlagen unter https://n.ethz.ch/~msteinkel