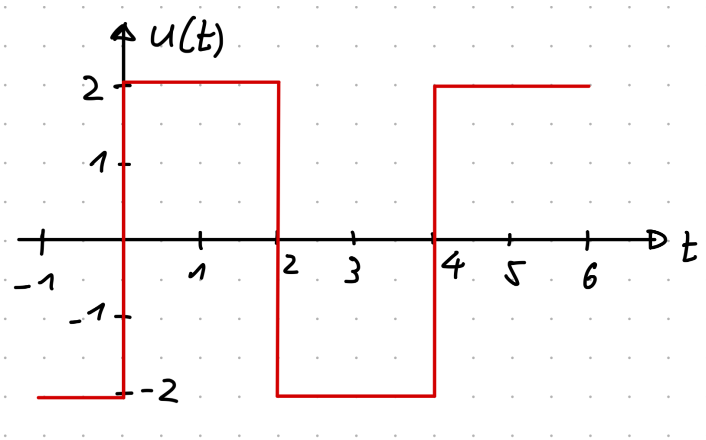
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

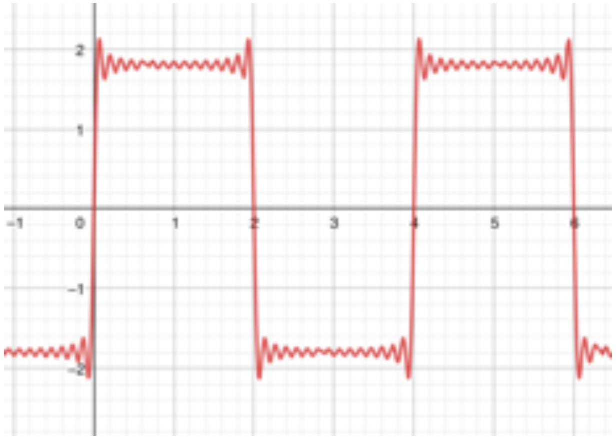
Netzwerke und Schaltungen II

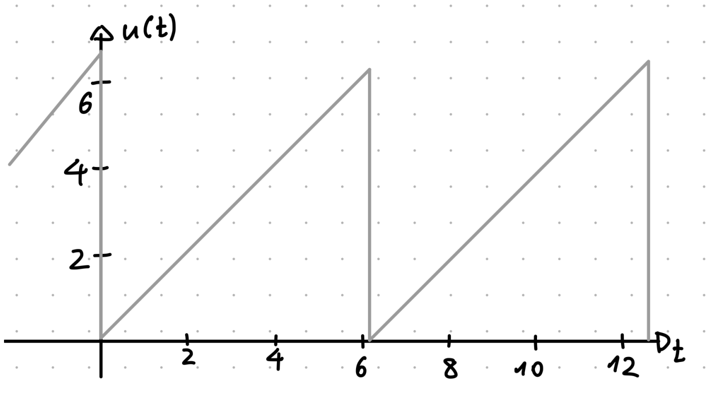
Übung 9
Superposition II, Fourierreihen

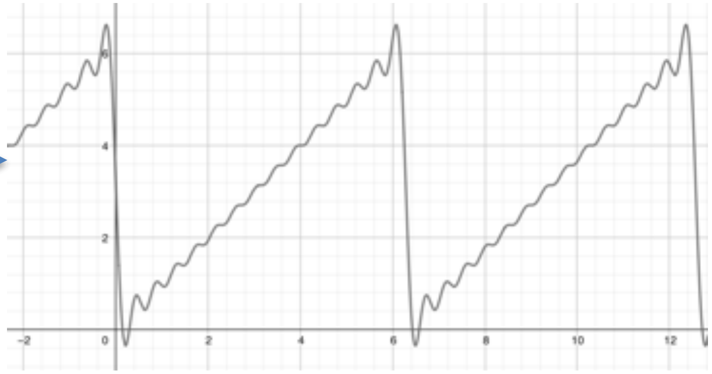
THEORIE FÜR DIE ÜBUNG

Grundidee – Fourierreihen



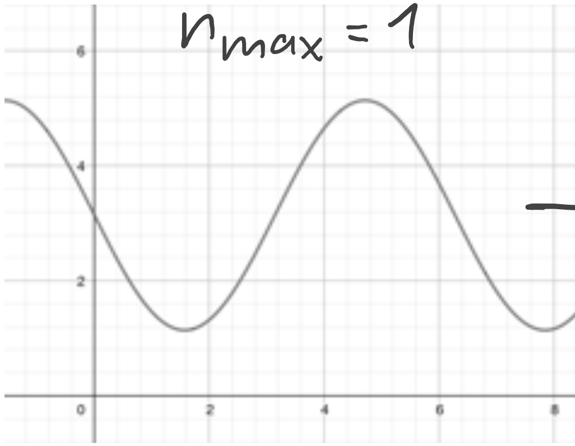




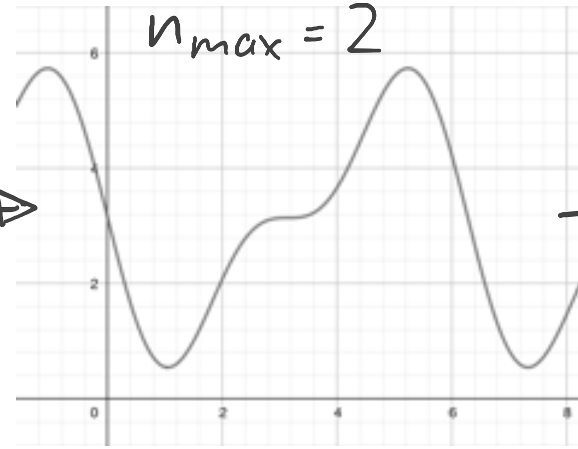


Grundidee - Fourierreihen

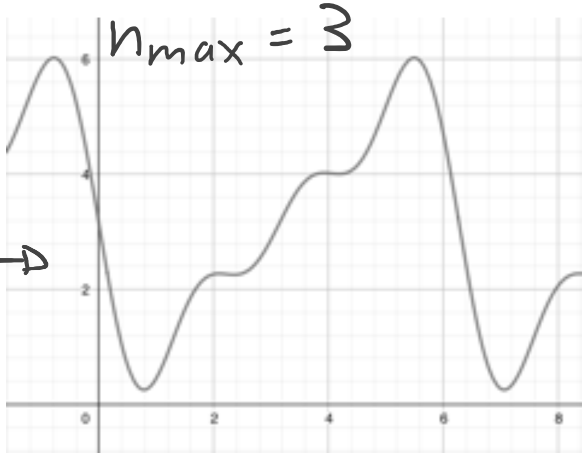
$n_{max} = 1$



$n_{max} = 2$

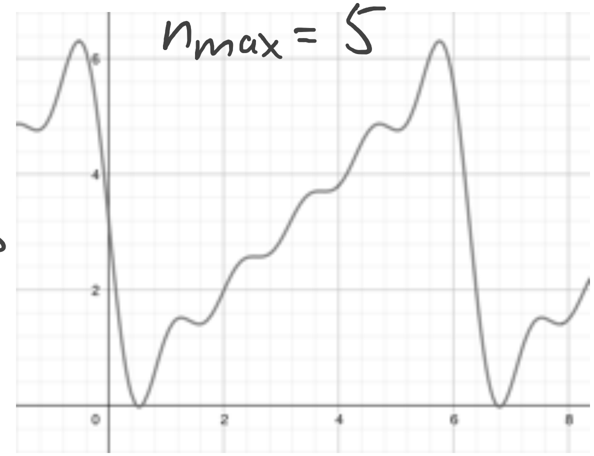


$n_{max} = 3$



...

$n_{max} = 5$



- **Ziel: Berechnung von RLC Netzwerken, die mit einer beliebigen periodischen Funktion (nicht Sinus/Kosinus) angeregt werden.**

- **Weg:**
  - **Wir benutzen die Fourierreihe, um die Input-Funktion als Linearkombination von Sinus/Kosinus Funktionen auszudrücken.**
  - **Quelle als Superposition dieser gefundenen Funktionen ausdrücken. (Achtung: unendlich viele)**
  - **Für jede Frequenz einzeln die Ausgangsspannung/strom berechnen. (Benutze komplexe Wechselstromrechnung)**
  - **Addition aller zuvor gefundenen Teil-ausgangsspannungen/ströme zur Gesamtausgangsspannung/strom im Zeitbereich. (Ergibt eine unendliche Reihe)**

Achtung: Die Überlagerung darf nur im Zeitbereich stattfinden. Zeiger unterschiedlicher Frequenz dürfen nicht addiert werden, da sie mit unterschiedlicher Geschwindigkeit rotieren

Spezialfall: AC und DC Quellen in einem Netzwerk

- **Wir können AC und DC Quellen separat betrachten und die jeweiligen Anteile im Zeitbereich (!) überlagern.**

- **Um die Wechselanteile zu berechnen, verwenden wir wie gewohnt die komplexe Wechselstromrechnung.**

- **Wenn wir die Gleichanteile berechnen, werden**
  - **Spulen zu Kurzschlüssen.** $Z_L = 0$
  - **Kondensatoren zu Leerläufen.** $Z_C = \infty$
- **Dann ist die Analyse wie in NuS 1 (ihr habt nur noch Wiederstände)**

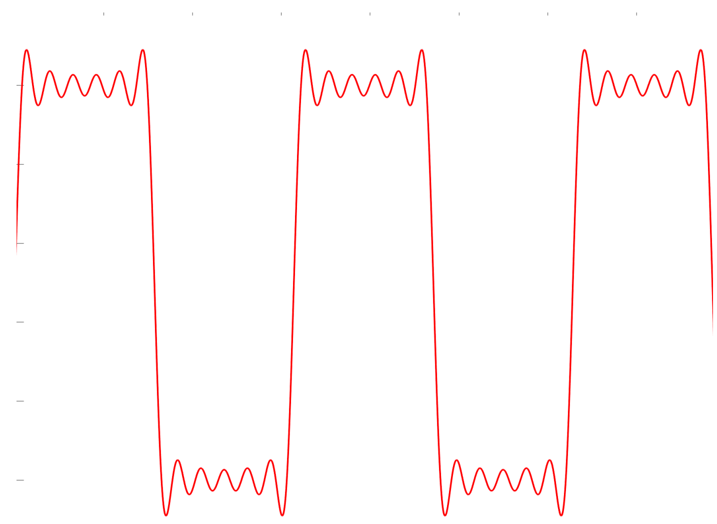
- **Darstellung einer beliebigen T-periodischen Funktion als Linearkombination von unendlich vielen Sinus und Kosinus Funktionen mit verschiedenen Frequenzen.**

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(\frac{2\pi k}{T} t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(\frac{2\pi k}{T} t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t) \cdot \cos(\frac{2\pi k}{T} t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t) \cdot \sin(\frac{2\pi k}{T} t) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t) dt$$



Vereinfachungen durch Symmetrie (wichtig!)

Symmetrien und Vereinfachungen

Gerade Funktionen

$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} u(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \hat{b}_n = 0$

$\hat{a}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$

$u(t) = u(-t)$ (→ Spiegelung an y-Achse)

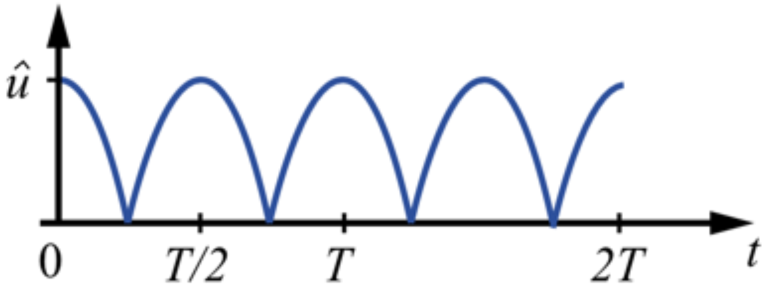
Ungerade Funktionen

$a_0 = \hat{a}_n = 0$

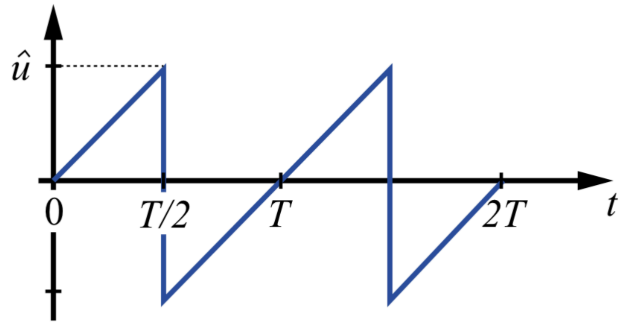
$\hat{b}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$

$-u(t) = u(-t)$ (→ Punktspiegelung)

- **Es gibt noch Halbwellensymmetrie (ZSMF) aber das zu sehen spart nicht wirklich Zeit, da ihr trotzdem $\hat{a}_n$ oder $\hat{b}_n$ berechnen müsst**
  → Es werden dann einfach viele Koeffizienten Null sein.



gerade



ungerade

Leistungen mit Fourierreihen berechnen

- **Spannungen/Ströme verschiedener Harmonischen haben keinen Einfluss auf die Leistung!**
- **Grund:**

Orthogonalität	$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\mathrm{d}t = 0$ für $m \neq n$
$(n, m \in \mathbb{N}^+)$	$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\mathrm{d}t = \frac{T}{2}$ für $m = n$
	$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t = 0$ für $m \neq n$
	$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\mathrm{d}t = \frac{T}{2}$ für $m = n$
	$\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\mathrm{d}t = 0$

BEISPIELAUFGABE

Beispielaufgabe 1

Gegeben ist das einfache Netzwerk in Abbildung 1, das mit Hilfe des Überlagerungsprinzips berechnet werden soll. Berechnen Sie alle Grössen zuerst analytisch und dann mit eingesetzten Zahlenwerten und Einheiten. Folgende Zahlenwerte sind gegeben:
$U_{\mathrm{DC}} = 5\,\mathrm{V}$, $\hat{u}_{\mathrm{AC}} = 10\,\mathrm{V}$, $R = 20\,\Omega$, $L = 15\,\mathrm{mH}$, $f = 100\,\mathrm{Hz}$

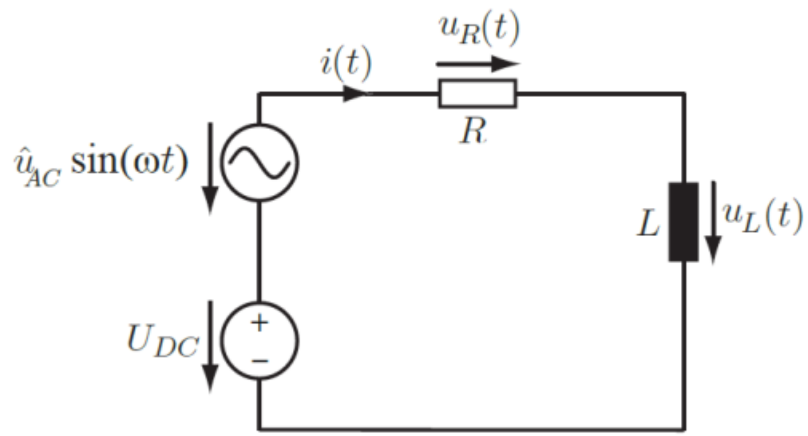


Abbildung 1: Netzwerk mit Gleich- und Wechselspannungsquelle

(a) Berechnen Sie den Strom I_{DC}, der sich zufolge der Gleichspannungsquelle einstellt.

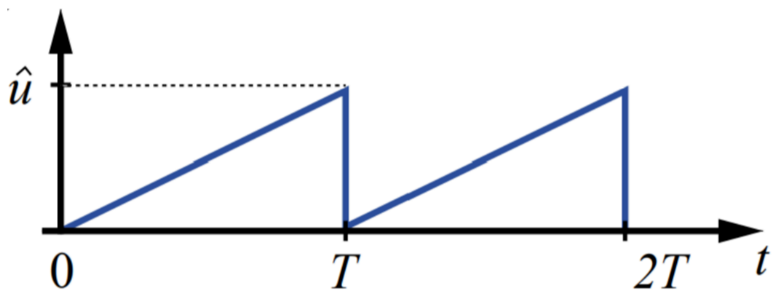
(b) Berechnen Sie den Strom $i_{AC}(t)$, der sich zufolge der Wechselspannungsquelle einstellt.

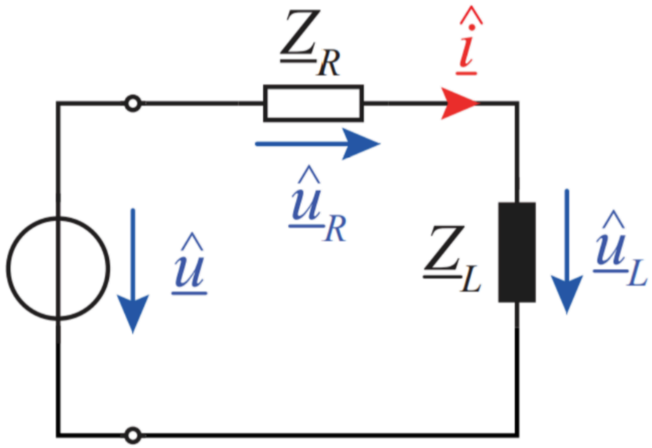
(c) Bestimmen Sie daraus den Gesamtstrom $i(t)$, der in dem Netzwerk fliesst.

Beispielaufgabe 2 (wichig!)

a.) Berechne die Fourierkoeffizienten des folgenden Signals $u(t)$

b.) Berechne den Strom $i(t)$ im Netzwerk





Kahoot!

Tipps für Serie 9

1. Analog zu Beispielaufgabe 1

2. Denkt an Symmetrie! benutzt $\hat{b}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} i(t)\sin(n\omega t)\,dt$

   anstatt $\hat{b}_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} i(t)\sin(n\omega t)\,dt$ damit ihr keine Fallunterscheidung für $i(t)$ braucht

3. Bei der Leistung: alle „Mischterme aus versch. Frequenzen" verschwinden im Integral wegen den Orthogonalitätsrelationen

→ z.B. $\int_0^T \left(\hat{a}_1\cos(\omega t) + \hat{b}_1\sin(\omega t) + \hat{a}_3\cos(3\omega t)\right)\hat{u}\sin(\omega t)\,dt$

$= \hat{b}_1\,\hat{u}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt = \ldots$

„nur die Terme mit Quadrat bleiben weil  ⇒ Fläche $\neq 0$"

Unterlagen unter https://n.ethz.ch/~msteinkel