ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Netzwerke und Schaltungen II

Übung 11
Netzwerksberechnung mit Laplace-Transformation

THEORIE FÜR DIE ÜBUNG

- **Analyse von beliebigen Signalen (-> SCHALTVORGÄNGE ohne DGL ☺)**
  - **Signale müssen nicht periodisch sein**
  - **Idealerweise ist die Laplace-Transformation der Anregung bekannt**

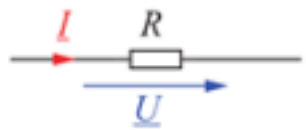
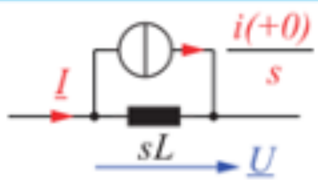
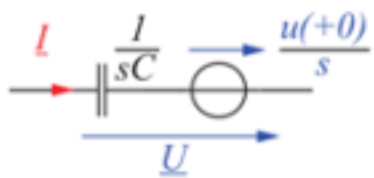
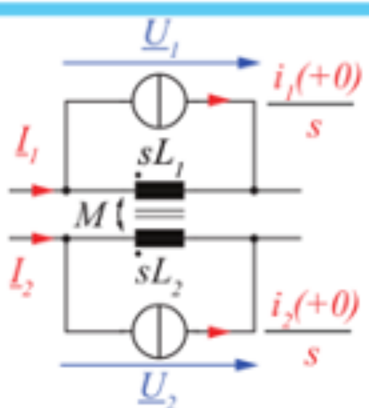
    → Tabelle auf der Zusammenfassung
- **Warum Laplace**
  - **Integration und Ableitungen sind einfacher im Bildbereich**

    → Keine Differenzialgleichungen, dafür muss man Transformieren

Vorgehen

- **Differeintialgleichung Aufstellen**
  - **Widerstand:** $\mathrm{u}(\mathrm{t}) = R \cdot i(t)$
  - **Kondensator:** $i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$
  - **Induktivität:** $\mathrm{u}(\mathrm{t}) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$
- **Gleichung in Laplace-Bereich transformieren**
  - $\mathrm{u}(\mathrm{t}), i(t) \quad \rightarrow \quad U(s), I(s)$
  - $\frac{df(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad s \cdot F(s) - f(t = 0)$
  - $\int_0^t f(\tau) d\tau \quad \rightarrow \quad \frac{F(s)}{s}$
- **Gleichung im Laplace-Bereich lösen**
- **Lösung zurücktransformieren**
  - **Verwende Laplace-Tabelle aus der Zusammenfassung**

Bauteile im Bildbereich

Komponente	Spannung	Strom
	$\underline{U}=R\underline{I}$	$\underline{I}=\underline{U}/R$
	$\underline{U}=sL\underline{I}-Li(+0)$	$\underline{I}=\frac{1}{sL}\underline{U}+\frac{i(+0)}{s}$
	$\underline{U}=\frac{1}{sC}\underline{I}+\frac{u(+0)}{s}$	$\underline{I}=sC\underline{U}-Cu(+0)$
	**Transformator-Gleichungen** $\underline{U}_1(s)=sL_1\underline{I}_1(s)-L_1i_1(+0)+sM\underline{I}_2(s)-Mi_2(+0)$ $\underline{U}_2(s)=sM\underline{I}_1(s)-Mi_1(+0)+sL_2\underline{I}_2(s)-L_2i_2(+0)$	

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{as^2+bs+c} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{s^2+\frac{b}{a}s+\frac{c}{a}} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

$$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = A(s-s_2) + B(s-s_1) \qquad (1)$$

$s = s_1$ in (1): $1 = A(s_1-s_2) \Rightarrow A = \dfrac{1}{s_1-s_2}$

$s = s_2$ in (1): $1 = B(s_2-s_1) \Rightarrow B = \dfrac{1}{s_2-s_1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{as^2+bs+c} = \frac{1}{a}\left(\frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s_1-s_2}\cdot\frac{A}{s-s_1} + \frac{1}{s_2-s_1}\cdot\frac{B}{s-s_2}\right)}}$$

BEISPIELAUFGABE

Teil 4 Laplace-Transformation (18 Punkte=15%)

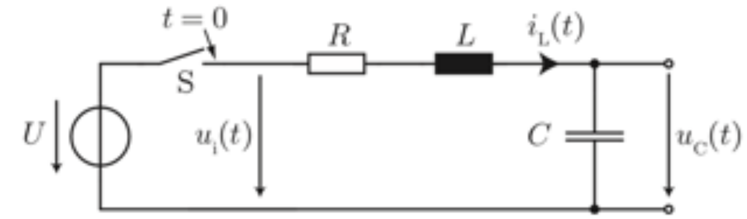


Abbildung 5: Serienschwingkreis an Spannungsquelle

Abbildung 5 zeigt einen Serienschwingkreis mit den Elementen R, L und C. Die Schaltung wird angeregt von einer DC-Spannungsquelle mit der Spannung U und durch den Schalter S an den Serienschwingkreis angeschlossen. Der Kondensator C ist im Zeitraum $t \leq 0$ auf den Spannungswert $u_C(0) = u_0$ geladen und der Strom durch die Spule L beträgt $i_L(0) = 0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S geschlossen.

a.) Zeichnen Sie die in Abbildung 5 gezeigte Schaltung im Laplace-Bildbereich für den Zeitraum $t \geq 0$.

b.) Stellen Sie die Maschengleichung für das gezeichnete Ersatzschaltbild im Laplace-Bildbereich auf und stellen Sie diese nach $\underline{I}_L(s)$ um.

c.) Berechen Sie die Nullstellen s_1, s_2, ... s_n des Nennerpolynoms von $\underline{I}_L(s)$ abhängig von R, L und C. Vereinfachen Sie den Ausdruck für $\underline{I}_L(s)$ in dem Sie das Nennerpolynom in Form seiner Linearfaktoren $(s - s_1)(s - s_2)...(s - s_n)$ angeben.

d.) Führen Sie die Partialbruchzerlegung von $\underline{I}_L(s)$ durch. Nehmen Sie an, dass die Nullstellen des Nennerpolynoms reell und einfach sind. Sie dürfen die Abkürzungen s_1, s_2, ... s_n für die Nullstellen des Nennerpolynoms in Ihrer Lösung verwenden.

e.) Berechnen Sie $i_L(t)$ im Zeitbereich mit Hilfe der berechneten Partialbruchzerlegung.

RC-Schaltung mit Laplace-Transformation

Gegeben ist die Schaltung in Abb.1, bestehend aus einem RC-Glied und einer Spannungsquelle U. Zum Zeitpunkt $t < 0$ befindet sich der Schalter S in der Position 0 und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ nach Position 1 geschaltet.
Nach der Zeit $t = dT$ geht der Schalter wieder zurück in die Position 0 und nach einer Periode T beginnt das Schaltprozedere von neuem, so dass sich die Spannung $u_{\mathrm{i}}(t)$ wie in Abb.2 gezeigt, ergibt. Folgende Zahlenwerte sind gegeben:
$U_0 = 1\mathrm{V}$, $R = 10\mathrm{k}\Omega$, $C = 1\mu\mathrm{F}$, $T = 0.1\mathrm{s}$, $d = 0.5$

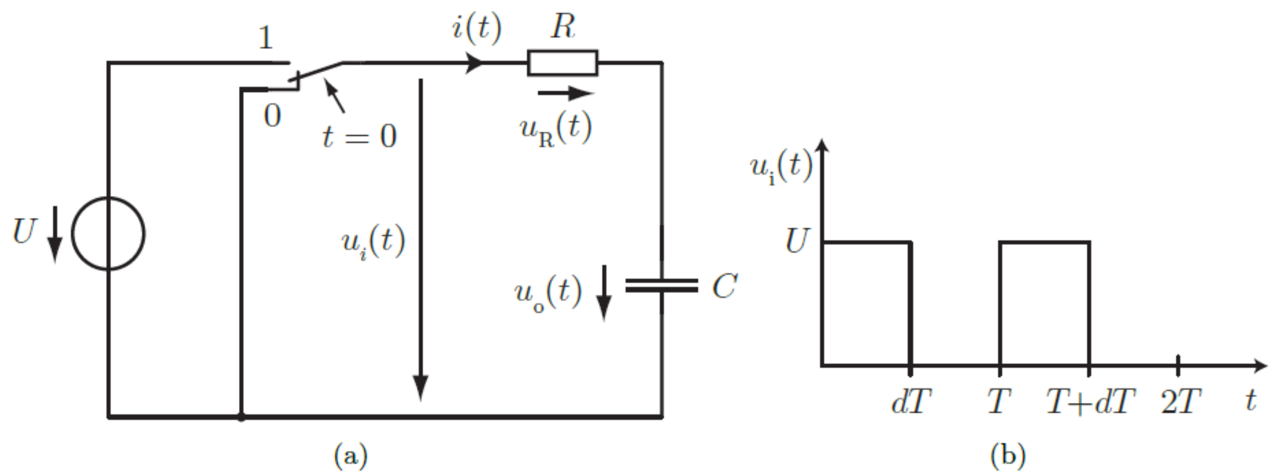


Abbildung 1: 1(a) RC-Schaldung, 1(b) Spannungsverlauf $u_{\mathrm{i}}(t)$

Berechnen Sie den Spannungsverlauf $u_{\mathrm{o}}(t)$ für den Zeitraum $0 < t < T$ mit Hilfe der Laplace-Transformation unter der Annahme, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ der Kondensator entladen ist.

Kahoot!

Tipps für Serie 11

2.1) fasst den Tastkopf und das Oscilloskop je als Impedanz zusammen
$\Rightarrow$ Spannungsteiler

2.2) siehe Beispielaufgabe! (100% identisch)

2.3) $T \to \infty \Rightarrow D_u T \to \infty \Rightarrow u_i(t) \to U\,E(t)$

3.3) $G_3(s) = G_2(s)\,G_1(s)$

3.4) Division durch Null $\Rightarrow$ ihr braucht eine andere Rücktransformation

4.) gute KomA Übung aber nicht relevant für NuS