

Lineare Algebra I & II
PVK Skript

Nicolas Bartsch
nbartsch@ethz.ch

Sommer 2024

0 Vorwort

Dieses Skript basiert auf den Unterlagen meiner Übung der Fächer „Lineare Algebra I“ und „Lineare Algebra II“ aus den Semestern HS23 und FS24. Weiterhin wurden Materialien aus den Übungsunterlagen von Robin Frauenfelder und dem PVK Skript von Gioele Zardini übernommen. Das Skript wurde für den PVK im Sommer 24 angefertigt und soll als Lernhilfe und Repetitorium für den Stoff der beiden Vorlesungen dienen. Es sind Theorie sowie Beispielaufgaben enthalten.

Trotz Revisionen des Skripts kann ich **weder die Vollständigkeit noch die Korrektheit garantieren**. Es ist möglich, dass kleine Fehler enthalten sind. Falls dir ein solcher Fehler auffällt, wäre ich dir dankbar, wenn du mich per E-Mail darüber informierst, damit das Skript korrigiert werden kann.

Eine aktuelle Version dieses Skripts sowie weitere Unterlagen findest du auf meiner Website: n.ethz.ch/~nbartzsch/.

Vielen Dank und viel Erfolg mit Lin Alg I & II.

Nicolas Bartzsch

Version: 3. Juli 2024

Inhaltsverzeichnis

0 Vorwort	i
1 Lineare Gleichungssysteme	1
1.1 Beispielaufgaben	5
2 Matrizen	7
2.1 Beispielaufgaben	17
3 Determinante	20
3.1 Beispielaufgaben	26
4 Vektorräume	30
4.1 Beispielaufgaben	41
5 Lineare Abbildungen	46
5.1 Beispielaufgaben	53
6 Eigenwertproblem	57
6.1 Beispielaufgaben	66
7 Methode der kleinsten Quadrate	70
7.1 Beispielaufgaben	73
8 Lineare Differentialgleichungssysteme	75
8.1 Beispielaufgaben	79

1 Lineare Gleichungssysteme

Definition:

Gleichungssysteme sind Mengen von Gleichungen mit einer oder mehreren Variablen.

Wann ist ein Gleichungssystem **linear**?

→ Wenn die Unbekannten nur in der ersten Potenz vorkommen. Meistens werden die Variablen mit reellen Skalaren multipliziert.

Bsp:

linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 7x_2 = 5 \end{cases}$$

nicht linear:

$$\begin{cases} e^{x_1} + x_2^2 = 6 \\ \frac{1}{x_1} + \cos(x_2) = 2 \end{cases}$$

Notation:

Erweiterte Matrix:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 6x_1 + 4x_2 + 1x_3 &= 9 \end{aligned}$$

→

x_1	x_2	x_3	
3	2	8	3
5	7	3	5
6	4	1	9

Matrix-Vektorprodukt $Ax = b$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ Matrix

m Gleichungen

n Unbekannte

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Spaltenvektoren

das Produkt wird definiert als:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = b$$

Lösungsverfahren:

Ein LGS hat entweder:

→ eine eindeutige Lösung

→ unendlich viele Lösungen

→ keine Lösung

Um Lösungen zu finden benutzen wir den **Gausschen Algorithmus**. Dadurch bringen wir das LGS in eine Form in der es einfach zu lösen ist. Diese Form heisst **Zeilenstufenform**.

$$\text{für } m=n \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \textcircled{3} & 2 & 8 & 3 \\ 0 & \textcircled{7} & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 9 \end{array} \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline \textcircled{3} & 2 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{9} & 9 \end{array} \quad \text{für } m \neq n$$

○ → Pivot

In dieser Form lässt sich das LGS durch Rückwärtseinsetzen lösen. Um auf die Zeilenstufenform zu gelangen benutzen wir den Gausschen Algorithmus. Dieser besteht aus elementaren Zeilenumformungen.

- I.) vertauschen von zwei Zeilen
- II.) addieren eines vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

Die Lösungsmenge bleibt durch diese Operationen unverändert.

Hat mein LGS nun eine, keine oder unendlich viele Lösungen? Betrachten wir einige LGS in Zeilenstufenform.

$$\begin{array}{c} n=3 \\ \text{rang}=3 \end{array} \left\{ \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \textcircled{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{-6} & -3 \end{array} \right.$$

wenn Rang gleich Anzahl
Unbekannte.

eindeutige Lösung

$$\begin{array}{c} n=3 \\ \text{rang}=2 \end{array} \left\{ \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \textcircled{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right.$$

Wenn Rang kleiner als Anzahl
Unbekannte und letzte Zeile
immer gültig.

unendlich viele Lösungen

$$\begin{array}{c} n=3 \\ \text{rang}=2 \end{array} \left\{ \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \textcircled{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

Wenn Rang kleiner als Anzahl
Unbekannte und letzte Zeile nie
gültig (Verträglichkeitsbedingungen)

keine Lösung

Geometrische Interpretation:

Zeileninterpretation:

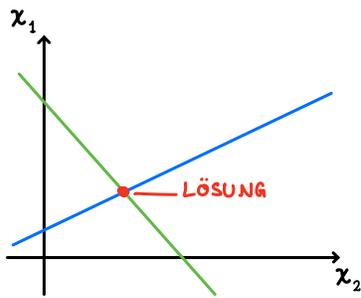
Betrachten wir die einzelnen Zeilen eines 2x2 LGS, so können wir 2 Geraden im 2-D Raum definieren.

Analog in 3-D mit Ebenen.

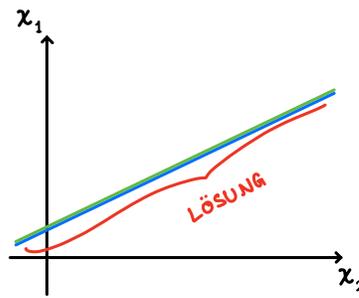
Bsp:

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 5 \Leftrightarrow x_2 = \frac{5}{2} - \frac{x_1}{2} \\ 5x_1 + 1x_2 = 7 \Leftrightarrow x_2 = 7 - 5x_1 \end{array}$$

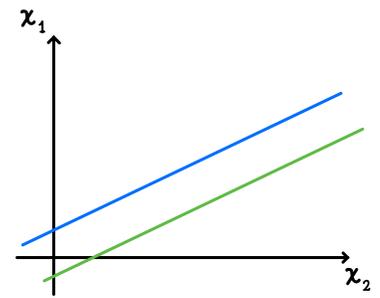
Abhängig von der Lösungsmenge können in 2-D folgende Fälle auftreten.



eindeutige Lösung



unendlich viele Lösungen



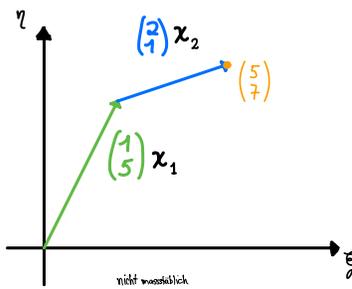
keine Lösung

Spalteninterpretation:

Dafür nehmen wir die Spalten als Vektoren und stellen unser LGS als Linearkombination der Spalten dar. Linearkombination bedeutet hier skalieren und addieren.

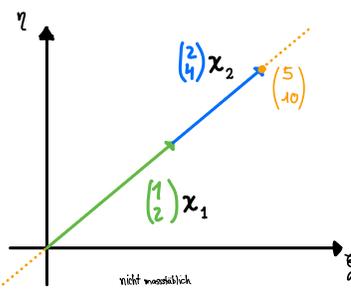
Bsp.:

$$\begin{matrix} 1x_1 + 2x_2 = 5 \\ 5x_1 + 1x_2 = 7 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$



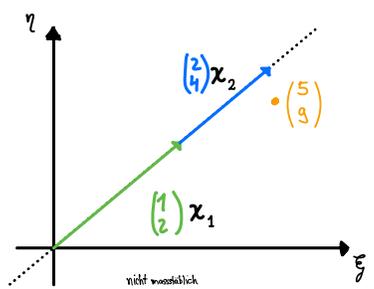
eindeutige Lösung

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$



unendlich viele Lösungen

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$



keine Lösung

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 9 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Wenn der Rang voll ist ($r = m$) gibt es für jedes b ($Ax = b$) eine eindeutige Lösung (denn alle Spaltenvektoren sind linear unabhängig)

Wenn der Rang nicht voll ist ($r < m$) sind mind. zwei Spalten linear abhängig. Der Rang sagt uns wie viele Spaltenvektoren linear unabhängig sind und dadurch auch die Dimension des Lösungsraum

		n: Anzahl Unbekannte							
		x_1	x_2	x_3	\dots	x_j	\dots	x_n	1
m: Anzahl Gleichungen	\otimes	*	*	*	\dots	*	\dots	*	b_1
	0	0	\otimes	\dots	*	\dots	*	b_2	
	0	0	0	\dots	*	\dots	*	b_3	
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	0	0	0	\dots	\otimes	\dots	*	b_r	
	0	0	0	\dots	0	\dots	0	b_{r+1}	
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	0	0	0	\dots	0	\dots	0	b_m	

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung ($x = 0$)
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig

1.1 Beispielaufgaben

1.1.1 Für welche Werte des Parameters a hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1 + 4x_2 + 5x_3 &= a \\ 1x_1 + ax_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2ax_2 - a^2x_3 &= a \end{aligned}$$

keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie jeweils auch die Lösungsmenge.

Lösung:

$$\begin{array}{c|c} \hline a & 4 & 5 & | & a \\ 1 & a & -2 & | & 1 \\ 2 & 2a & -a^2 & | & a \\ \hline \end{array} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{array}{c|c} \hline 1 & a & -2 & | & 1 \\ a & 4 & 5 & | & a \\ 2 & 2a & -a^2 & | & a \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\substack{-a \cdot I + II \\ -2 \cdot I + III}} \begin{array}{c|c} \hline 1 & a & -2 & | & 1 \\ 0 & -a^2+4 & 2a+5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4-a^2 & | & -2+a \\ \hline \end{array}$$

i.) keine Lösung

$$\begin{aligned} 4-a^2=0 &\Leftrightarrow a^2=4 \Leftrightarrow a=\pm 2 \\ -2+a \neq 0 &\Leftrightarrow a \neq 2 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 4-a^2=0 \\ -2+a \neq 0 \end{aligned}} \right\} a = -2$$

ii.) eindeutige Lösung

$$4-a^2 = -2+a \Leftrightarrow a^2+a-6=0 \Leftrightarrow (a+3)(a-2)=0 \rightarrow \begin{matrix} a = -3 \\ a = 2 \end{matrix} \rightarrow \text{für } a=2 \text{ ist Rang nicht voll!}$$

$$a = -3 : \begin{array}{c|c} \hline 1 & -3 & -2 & | & 1 \\ 0 & -5 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & -5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{aligned} x_3 &= 1 \\ -5x_2 - x_3 &= 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{x_3}{5} = -\frac{1}{5} \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 1 \Rightarrow x_1 = 1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 - \frac{3}{5} + 2 = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

iii.) unendlich viele Lösungen

$$\begin{aligned} 4-a^2=0 &\Leftrightarrow a^2=4 \Leftrightarrow a=\pm 2 \\ -2+a=0 &\Leftrightarrow a=2 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 4-a^2=0 \\ -2+a=0 \end{aligned}} \right\} a = 2$$

$$\begin{array}{c|c} \hline 1 & 2 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{aligned} 0x_3 &= 0 \Leftrightarrow x_3 = 0 \\ x_2 &= t \quad t \in \mathbb{R} \\ x_1 + 2x_3 - 2x_2 &= 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - 2t \end{aligned}$$

1.1.2 Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

$$\begin{aligned} 0x_1 + ax_2 + 1x_3 &= -b \\ ax_1 + 0x_2 + bx_3 &= -1 \\ ax_1 + ax_2 + 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

- a) eine Lösungsmenge mit *zwei* freien Parametern besitzt.
- b) eine Lösungsmenge mit *einem* freien Parameter besitzt.
- c) eindeutig lösbar ist.
- d) keine Lösung hat.

Geben sie für alle Fälle a), b), c) die Lösungsmenge an.

Lösung:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 1 & -b \\ a & 0 & b & -1 \\ a & a & 2 & -2 \end{array} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & -1 \\ 0 & a & 1 & -b \\ a & a & 2 & -2 \end{array} \xrightarrow{-I+III} \begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & -1 \\ 0 & a & 1 & -b \\ 0 & a & -b+2 & -1 \end{array} \xrightarrow{-II+III} \begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & -1 \\ 0 & a & 1 & -b \\ 0 & 0 & -b+1 & b-1 \end{array}$$

a.) zwei freie Parameter: $a=0, b=1$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{aligned} x_3 &= -1 \\ x_2 &= t \\ x_1 &= s \end{aligned} \quad \begin{matrix} \\ \\ \text{S,t} \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

b.) ein freier Parameter: $a \neq 0, b=1$

$$\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{aligned} x_3 &= t \quad t \in \mathbb{R} \\ ax_2 &= -1 - x_3 \Leftrightarrow x_2 = \frac{-1-t}{a} \\ ax_1 &= -1 - x_3 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-1-t}{a} \end{aligned}$$

c.) eindeutig lösbar: $a \neq 0, b \neq 1$

$$\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & -1 \\ 0 & a & 1 & -b \\ 0 & 0 & -b+1 & b-1 \end{array} \quad \begin{aligned} (-b+1)x_3 &= b-1 \Leftrightarrow x_3 = \frac{b-1}{1-b} = -\frac{(1-b)}{1-b} = -1 \\ ax_2 &= -b - x_3 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1-b}{a} \\ ax_1 &= -1 - bx_3 \Leftrightarrow x_1 = \frac{b-1}{a} \end{aligned}$$

d.) keine Lösung: $a=0, b \neq 1$

2 Matrizen

Was sind Matrizen?

Wir können uns Matrizen verallgemeinert als "Zahlenfelder" vorstellen.

Eine $m \times n$ Matrix A hat die Form:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} \right\} \begin{array}{l} m \text{ Zeilen} \\ n \text{ Spalten} \end{array} \rightarrow A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

(Zeilen zuerst, Spalten später)

$a_{ij} = (A)_{ij}$ ist der Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte.

Matrizen mit nur einer Spalte oder Zeile sind Spalten- bzw. Zeilenvektoren

Wichtige Matrizen:

→ Quadratisch := $m = n$

→ Nullmatrix := $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alle Einträge sind null

→ Obere Dreiecksmatrix
Rechtsdreiecksmatrix := $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $m = n$ und $(A)_{ij} = 0$ für $i > j$

→ Untere Dreiecksmatrix
Linksdreiecksmatrix := $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $m = n$ und $(A)_{ij} = 0$ für $i < j$

→ Diagonalmatrix := $\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, d_{33})$ (Skaliert)

→ Einheitsmatrix
Identität := $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$ (wie "1")

Transponieren:

Die Transponierte von A ist A^T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Transponieren ist wie Spiegeln an einer Diagonalen

Ein transponierter Zeilenvektor wird zu einem Spaltenvektor und umgekehrt.

→ Symmetrische Matrizen := $A = A^T, m=n$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

→ Antisymmetrische Matrizen := $A^T = -A, m=n$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ was muss auf der Diagonalen stehen?

Rechnen mit Matrizen: $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

Addition: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

→ Einträge werden einzeln addiert

Subtraktion: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

→ Einträge werden einzeln subtrahiert

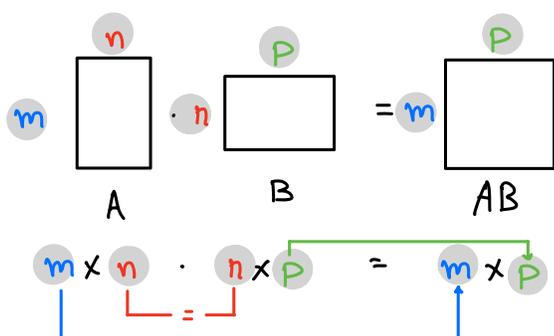
Multiplikation:

• mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$: $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

• mit einer anderen Matrix :

seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

nicht alle Matrizen können zusammen multipliziert werden. Bedingung ist :



wenn Bedingung erfüllt ist das Produkt definiert durch:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n (A)_{ik} (B)_{kj}$$

Formel sieht komplizierter aus als es eigentlich ist. (Skalarprodukt von Zeilen und Spalten)

→ Zusammenfassend: Spalten auf Zeilen legen.

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{2 \times 3}_{=} \cdot \underbrace{3 \times 2}_{=} = 2 \times 2 \rightarrow \text{Bedingung erfüllt}$$

Berechnen wir nun das Ergebnis a_{12} . Dafür brauchen wir:

1. Zeile der ersten Matrix und 2. Spalte der zweiten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$a_{12} = (1 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & 2 \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

Analog für a_{11}, a_{21}, a_{22}

$$a_{11} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad a_{21} = (0 \ 2 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \quad a_{22} = (0 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

Rechenregeln:

$$A+B = B+A$$

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A+B)C = AC+BC$$

$$A(C+D) = AC+AD$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ACHTUNG: $AB \neq BA$

im allgemeinen Fall

Matrix-Vektor Multiplikation: (Spaltenstruktursatz)

Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $x \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ dann ist Ax ein 3×1 Spaltenvektor.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun einige Spezialfälle:

Sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{erste Spalte von } A$$

Wenn nun $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{zweite Spalte von } A$$

Sei $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{zwei mal zweite Spalte}$$

Sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Generell gilt für Ax : $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$$Ax = \underbrace{x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots + x_n a^{(n)}}_{\text{Linearkombination der Spalten von } A} \quad a^{(j)} = j\text{-te Spalte von } A$$

Die Matrizen verhalten sich also ähnlich wie Funktionen. Wenn man einen Vektor mit einer Matrix multipliziert kommt wieder ein Vektor raus. Analog zu einer Funktion z.B. $f(x)$.

In der linearen Algebra nennen wir dies Transformation oder Abbildung.

Was wenn x eine Matrix ist? Seien also $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir können dieses Produkt wie zwei Multiplikationen von Matrix mit Vektor sehen

$$AB = (Ab^{(1)} \quad Ab^{(2)} \quad \dots \quad Ab^{(p)})$$

Dadurch kann man Matrix Multiplikationen in bestimmten Fällen einfach ablesen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

zweite Spalte
+ dritte Spalte

zwei mal erste Spalte

Wenn wir wieder an Matrizen als Transformationen denken, so ist das Multiplizieren von Matrizen wie ein konsekutives Ausführen von Transformationen.

$$ABx = Ax' = x''$$

← Reihenfolge der Multiplikation

- 1.) Zuerst transformiert B den Eingabevektor x . Das generiert den transformierten Vektor x'
- 2.) Danach transformiert A den bereits transformierten Vektor x' zu x''

Wir können von Matrizen addieren, subtrahieren und multiplizieren.

Können wir auch "dividieren"?

In den reellen Zahlen können wir Division als eine Multiplikation schreiben: $\frac{x}{a} = xa^{-1}$

Inverse Matrizen:

Die $n \times n$ Inverse von einer $n \times n$ Matrix A wird mit A^{-1} bezeichnet. Es gilt:

$$AA^{-1} = \mathbb{I}_n$$

Wenn A eine Inverse besitzt, so nennt man A **regulär** oder **invertierbar**.

Bildlich macht A^{-1} die Transformation von A rückgängig.

Rechenregeln:	
$I^{-1} = I$	$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
$(A^{-1})^{-1} = A$	$\text{rang}(A^{-1}) = \text{rang}(A)$
$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$	
$(c \cdot A)^{-1} = c^{-1} \cdot A^{-1}$	
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$	

Um nun die Inverse einer beliebigen $n \times n$ Matrix zu berechnen benutzen wir den **Gauss-Jordan Algorithmus**:

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\text{I} - 2 \cdot \text{II}} \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\text{II} - 5 \cdot \text{III}} \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -5 \end{array} \xrightarrow{-1 \cdot \text{III}} \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \\ \\ \xrightarrow{4 \cdot \text{III} - \text{II}} \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{5} \cdot \text{II}} \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \xrightarrow{\text{II} + \text{I}} \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \xrightarrow{\frac{1}{2} \cdot \text{I}} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \end{array}$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}}$$

Allgemein führen wir folgende Operation durch: $A | \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I} | A^{-1}$

Für 2×2 Matrizen gilt ausserdem:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Bsp: Bestimme die Inverse von A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3 - 2 \cdot 1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Wenn A eine Inverse besitzt, so nennt man A **regulär** oder **invertierbar**.

Wie kann es sein das nicht immer eine Inverse existiert?

Letzte Woche sahen wir, dass bei einem Produkt zwischen Matrix und Vektor wieder ein Vektor entsteht. Das Resultat kann also als transformierte Version des ursprünglichen Vektors gesehen werden. Mit der Inversen A^{-1} von A können wir die Transformation rückgängig machen. Mathematisch heißt das:

$$\text{wenn } A \cdot v = w \text{ dann ist } A^{-1} \cdot w = v$$

Die Multiplikation mit A^{-1} macht die Multiplikation von A rückgängig

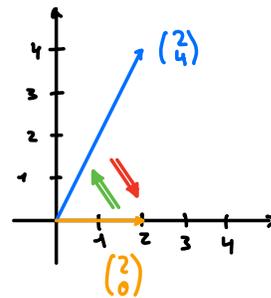
i.) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1^{-1}$

Welche Lösung hat dann $A_1 x = b$?

→ Es gibt ein eindeutiges x für jedes b

Es kann also eine Matrix existieren, sodass eindeutig

$$A_1^{-1} b = x$$



ii.) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2^{-1}$

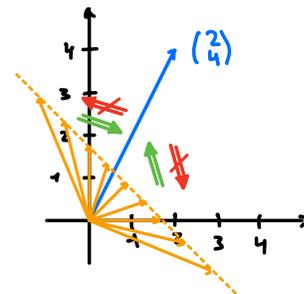
Welche Lösung hat dann $A_2 x = b$?

→ Es gibt unendlich viele x für jedes b .

Jedes x der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ erfüllt die Gleichung

Wir können also keine eindeutige Inverse finden, sodass

$$A_2^{-1} b = x$$



Betrachten wir nochmal genauer A_1 & A_2 . Was fällt auf?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Rang}(A_1) = 2 \Rightarrow A \text{ ist regulär}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rang}(A_2) = 1 \Rightarrow A \text{ ist singulär}$$

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung ($x = 0$)
- A ist invertierbar/regulär
- Zeilen/Spalten sind linear unabhängig

Orthogonale Matrizen:

Eine $n \times n$ Matrix heisst orthogonal, falls:

$$A^T A = I_n \quad \text{bzw.} \quad A^{-1} = A^T$$

→ d.h. orthogonale Matrizen sind u.A. sehr leicht invertierbar!

Orthogonale Matrizen erfüllen immer diese Eigenschaften:

- Zeilen haben Länge 1 und sind senkrecht aufeinander
- Spalten haben Länge 1 und sind senkrecht aufeinander

Bsp: Sei A orthogonal:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii. } \sqrt{a_1^2 + a_3^2} \stackrel{!}{=} 1, \quad \sqrt{a_2^2 + a_4^2} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

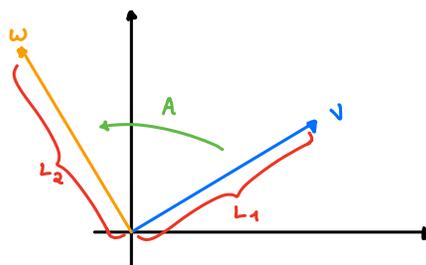
Wenn Bedingungen erfüllt → Orthogonal! (Es reicht eine von beiden)

Transformationen von orthogonalen Matrizen:

i. Vektoren bleiben gleich lang.

$$Av = w$$

$$L_1 = L_2$$

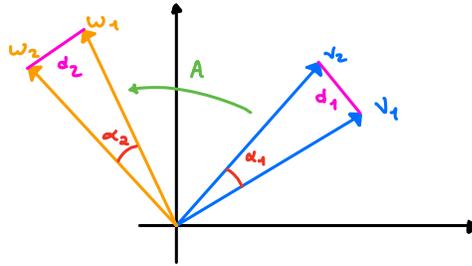


ii. Distanzen bzw. Winkel bleiben

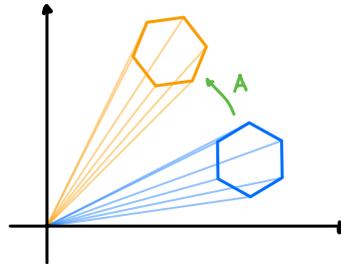
erhalten.

$$Av = w$$

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad d_1 = d_2$$



Insgesamt behalten Formen ihre Geometrie bei.



Beispiele sind Rotationen und Spiegelungen

LR-Zerlegung:

Wie können wir ein LGS der Form $Ax=b$ für viele b schnell lösen?

Idee:

Zerlege $A = LR$

L ist dabei eine Linksdreiecksmatrix

R ist eine Rechtsdreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

mit Hilfe dieser Zerlegung müssen wir nicht mehr Gauß! Es gilt dann:

$$Ax = LRx = Ly = b$$

d.h. um für ein generelles b zu lösen gehen wir wie folgt vor:

i. $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen

ii. $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\text{i. } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{Aus Aufgabe}$$

$$\text{ii. } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}}_R \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{Lösung für } Ax=b$$

Kochrezept anwenden können! Ist alles auf Zusammenfassung:

2.8 LR-Zerlegung

$$A = L \cdot R$$

Mit der LR-Zerlegung kann man eine quadratische Matrix A in das Produkt einer Linksdreiecksmatrix L sowie einer Rechtsdreiecksmatrix R zerlegen. Dies ermöglicht ein effizienteres Lösen von $Ax = b_i$ mit vielen verschiedenen b_i .

Bsp: Löse $Ax = b$ durch LR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$

Vorgehen:

- ① Bringe A durch Zeilensubtraktion in Dreiecksform. Bei erzeugten Nullstellen speichert man, das Wievielfache einer anderen Zeile von dieser Zeile subtrahiert wurde.

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \boxed{2} & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$: Von dieser Zeile wurde das 2-fache einer anderen subtrahiert.

- ② Bestimme L und R . L besteht aus den markierten Einträgen und 1 auf der Diagonale, R aus den nichtmarkierten Einträgen.

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \boxed{2} & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- ③ Löse $Ly = b$ (einfach, da L eine Dreiecksmatrix).
- ④ Löse $Rx = y$ (einfach, da R eine Dreiecksmatrix).

LRP-Zerlegung mit Permutationsmatrix P

$$P \cdot A = L \cdot R$$

Manchmal ist es notwendig, dass man bei ① zusätzlich Zeilen vertauschen kann. Dies wird durch eine Permutationsmatrix P möglich.

Hierzu schreibe man zu Beginn die Identitätsmatrix neben A , und macht mit dieser alle Zeilenvertauschungen mit:

Bsp: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$

Auf der linken Seite steht am Ende die Permutationsmatrix P . L und R werden auf die gleiche Weise wie üblich bestimmt.

Bei ③ löse man nun $Ly = Pb$, bei ④ weiterhin $Rx = y$.

2.1 Beispielaufgaben

2.1.1 Was ist

$$(0 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

Lösung:

$$\rightarrow (0 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

extrahiert die zweite Spalte

$$\rightarrow (0 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$
$$(0 \ 0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3$$

Wir müssen nur $(-3 \ 2 \ -3 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ auswerten $\rightarrow -4$

2.1.2 Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Für welche Werte von a ist die Matrix A singular bzw. regulär? Bestimmen Sie für $a = 0$ die Inverse von A .

Lösung:

Singular : nicht invertierbar \rightarrow zeilen/Spalten lin. abhängig

Regulär : Invertierbar \rightarrow zeilen/Spalten lin. unabhängig

für $a = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1 \end{array} & \xrightarrow{\text{IV}-\text{II}} & \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{jetzt sind I \& IV lin. abhängig} \\ \text{Singular wenn } a = \frac{1}{2} \end{array}$$

für $a=0$

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{I}+\text{III}} \\ \xrightarrow{-\text{II}+\text{IV}} \end{array} & \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{I}-2\cdot\text{III}} \\ \xrightarrow{-2\cdot\text{IV}+\text{I}} \end{array} & \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{I}+2\cdot\text{III}} \\ \xrightarrow{-\text{IV}+\text{III}} \end{array} & \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} & \end{array} \end{array}$$

2.1.3 Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A , so dass $LR = PA$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & 6 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{array} \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{array} \xrightarrow{\text{III} - \text{I}} \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & -8 \end{array} \xrightarrow{\text{III} - (-9)\text{II}}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & -35 \end{array}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -9 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Determinante

Intuition:

Der orientierte Flächeninhalt des Parallelogramms, welches von zwei Vektoren aufgespannt wird, lässt sich mit dem **Kreuzprodukt** berechnen.

Betrachten wir zunächst die Fläche die von den Einheitsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im \mathbb{R}^2 beschrieben wird.

Mit dem Kreuzprodukt erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \rightarrow |1 \cdot 1| = 1$$

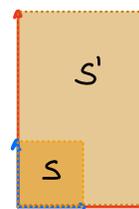


Was passiert nun mit dem Einheitsquadrat wenn wir auf beide Vektoren eine Matrix A anwenden.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Fläche S' lässt sich durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$ berechnen.

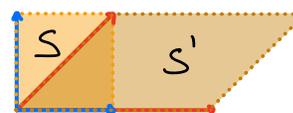
Im Vergleich zum Einheitsquadrat ist die Fläche **6 mal grösser** geworden.



Betrachten wir nun ein ähnliches Beispiel indem die Vektoren durch eine Matrix C transformiert werden

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$



Die Fläche ist **2 mal grösser** geworden.

Der Faktor mit welchem die Fläche des Einheitsquadrats skaliert wird lässt sich bei linearen Transformationen auf jede Ausgangsform übertragen. Alle Flächen werden demnach mit dem selben Faktor skaliert. Die Form muss nicht erhalten bleiben

Wie können wir diesen Faktor bestimmen?

Wenden wir uns nochmals an das Einheitsquadrat. $(b^{(1)} \ b^{(2)}) = B$

Wir nutzen, dass $(Ab^{(1)} \ Ab^{(2)}) = AB$ gilt und somit können wir die transformierten Vektoren aus dem Produkt AB auslesen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2 \quad \text{d.h. } AB = A$$

Wir erkennen nun, dass die Spalten der Matrix A unsere transformierten Einheitsvektoren sind.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir können also direkt aus A die Vektoren auslesen und die Definition des Kreuzproduktes anwenden.

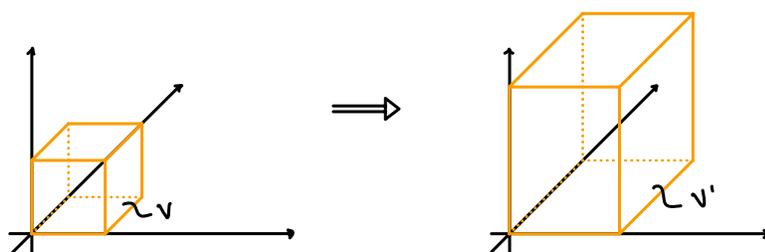
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \rightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = S$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \rightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = \text{Faktor mit welchem Flächen skaliert werden.} \\ = \det(A)$$

diese Grösse heisst **Determinante**.

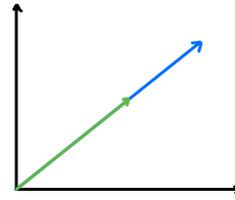
Erinnerung: Orientierter Flächeninhalt! Eine negative Determinante bedeutet dass die Fläche skaliert und ihre Orientierung invertiert wird.

In 3-D beschreibt die Determinante wie sich **Volumen** verändern:



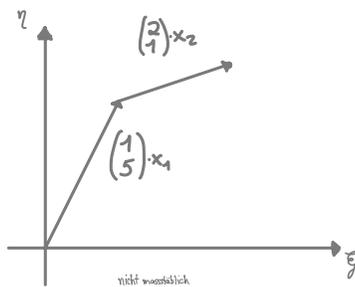
Wenn die Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ parallel sind ist die Fläche des, von ihnen aufgespannten, Parallelograms null

Es gilt dann $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

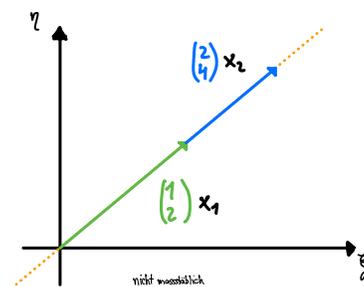


Eine 2×2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ hat also $\det = 0$ wenn die Spalten parallel sind.

Erinnern wir uns nun an die Spalteninterpretation von LGS der Form $Ax=b$ zurück



Rang voll



Rang nicht voll

hier sahen wir, dass wenn beide Spalten in die selbe Richtung zeigen bzw. parallel sind, der $\text{Rang}(A)$ nicht voll ist.

Rang und Determinante hängen also zusammen.

Genauer können wir sagen: $\text{Rang}(A)$ ist voll $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung ($x = 0$)
- A ist invertierbar/regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen/Spalten sind linear unabhängig

Berechnung:

Allgemein

kann man die Determinante rekursiv definieren:

$$\det A := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{oder} \quad \det A := \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Zum ausrechnen mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz: (für jede $n \times n$ Matrix)

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Laplace'scher Entwicklungssatz:
Bei den meisten Matrizen ineffizient. Kann jedoch bei Matrix mit vielen Nullen in einer Zeile oder Spalte geschickt angewendet werden.
① Zeile oder Spalte auswählen (dort wo viele Nullen).
② Jedem Element dieser Zeile/Spalte ein Vorzeichen zuordnen (Schachbrett).
③ Für jedes Element die zugehörige Zeile und Spalte streichen und Unterdeterminante bestimmen.
④ Jede Unterdeterminante mit zugehörigem Element und Vorzeichen multiplizieren und addieren.

i.) Zeile / Spalte auswählen (viele Nullen)

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

ii.) Vorzeichen (Schachbrett)

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det A := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

iii.) Unterdeterminanten bestimmen

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Erstes Element der ausgewählten Spalte:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Zweites Element der ausgewählten Spalte:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow -(-2) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Drittes Element der ausgewählten Spalte:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

iv.) Zusammen addieren:

$$\det A := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} &= +0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= 2(-10 - 18) + 3(4 - 3) = -53 \end{aligned}$$

Spezialformeln:

• Für 2×2 :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

• Für 3×3 gibt es Regel von Sarrus: (Spatprodukt)

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$$

Skalarprod.

Positiv wenn Vektoren in Multiplikationsreihenfolge ein Rechtssystem bilden.

"Bildlich:"

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \\ + & + & + \end{matrix} & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \\ - & - & - \end{matrix} \\ aei + bfg + cdh & - gec - hfa - idb \end{array}$$

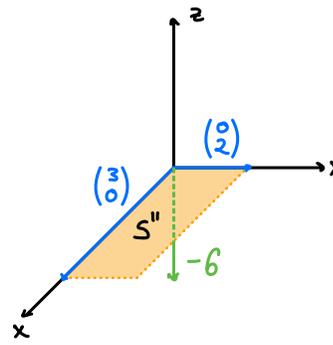
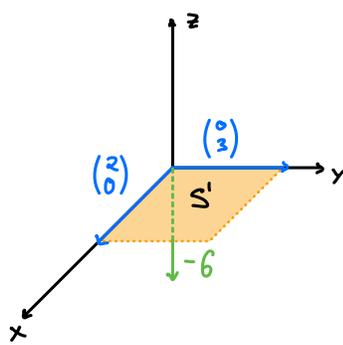
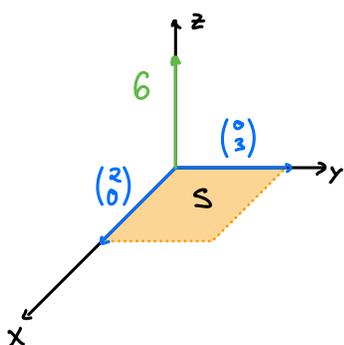
Durch geschicktes modifizieren von A lässt sich die Rechnung vereinfachen. Wir können folgende Modifikationen durchführen.

i.) Vertauschen von Zeilen/Spalten \rightarrow Vorzeichen der Determinante wechselt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

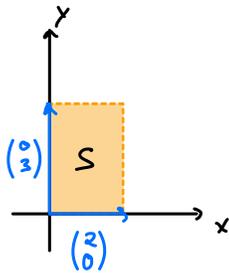
$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$



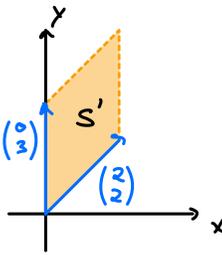
ii.) Bei Spalten- Zeilenaddition bleibt Determinante gleich

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$



$$S = 6$$



$$S' = 6$$

Die Determinante einer Dreiecksmatrix lässt sich einfach bestimmen:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = ad - 0b = ad$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = aei + bf0 + c00 - 0ec - 0fa - 0b = aei$$

Wenn A eine Nullzeile / Nullspalte besitzt, so ist $\det(A) = 0$. Man könnte immer nach der Nullzeile / Nullspalte entwickeln und 0 erhalten.

Besitzt A zwei identische Zeilen so ist $\det(A) = 0$. Der Rang ist nicht voll (es kann eine Nullzeile durch Spalten- Zeilenaddition erzeugen).

Alle Regeln sind auch auf der Zsfg.

3.2 Rechenregeln Determinante
Neben den Zeilen/Spalteneigenschaften von 3.1 gelten folgende Rechenregeln:
$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
$\det(A^T) = \det(A)$
$\det(\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$
$\det(\text{Dreiecksmatrix}) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$
$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

1. Halbtage
→

3.1 Beispielaufgaben

3.1.1 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne $\det(A^T)$.

Lösung:

$$\begin{aligned} A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \det(A^T) = 4 + 24 + 48 - 64 - 6 - 12 \\ &= -6 \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

3.1.2 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechne $\det(A^{-1})$.

Lösung:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(A) = 4 - 6 = -2 \rightarrow \det(A^{-1}) = -\frac{1}{2}$$

3.1.3 Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie $\det(M)$
 b) Für welche a, b, d ist M singulär?

Lösung:

a.)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Blockatz}} \det(M) = \det(\text{orange}) \cdot \det(\text{green})$$

$$\det(\text{orange}) = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & b & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & b & 3 \end{vmatrix} = -\{-6a + ab\} = 6a - ab$$

$$\det(\text{green}) = \begin{vmatrix} -1 & c \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - c$$

$$\det(M) = -(6a - ab)(2 + c) = a(b - 6)(2 + c)$$

b.) Singulär wenn $\det(M) = 0$

$$\rightarrow a(b - 6)(2 + c) = 0$$

$$a = 0, b = 6, c = -2$$

3.1.4 Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -3a & 2b & 3c & 2d \\ a & b & -c & d \\ -2a & -2b & -2c & d \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von A .

Lösung:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -3a & 2b & 3c & 2d \\ a & b & -c & d \\ -2a & -2b & -2c & d \end{vmatrix} \stackrel{-I+III}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -3a & 2b & 3c & 2d \\ 0 & 0 & -2c & 0 \\ -2a & -2b & -2c & d \end{vmatrix} = -2c \begin{vmatrix} a & b & d \\ -3a & 2b & 2d \\ -2a & -2b & d \end{vmatrix}$$

$$= -2c \{ 2abd - 4abd + 6abd + 4abd + 3abd \}$$

$$= -2c \{ 15abd \}$$

$$= -30abcd$$

3.1.5 Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & b & b & d \\ b & c & d & d & b & d & a \\ c & d & b & c & d & c & c \\ d & b & c & d & b & b & c \\ b & d & c & b & d & b & b \\ b & c & d & d & b & d & a \\ d & a & c & d & a & b & c \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von A .

Lösung:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & b & b & d \\ b & c & d & d & b & d & a \\ c & d & b & c & d & c & c \\ d & b & c & d & b & b & c \\ b & d & c & b & d & b & b \\ b & c & d & d & b & d & a \\ d & a & c & d & a & b & c \end{pmatrix} \longrightarrow \text{II} = \text{VI} \text{ also } \det(A) = 0$$

4 Vektorräume

Intuition:

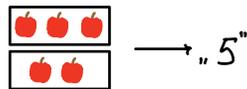
Wenn wir Zählen lernen entwickeln wir ein abstraktes Gefühl für Zahlen.



egal welches Objekt wir können einer gewissen Anzahl Objekten eine Zahl zuweisen.

Die Zahl 3 ist demnach nicht nur an Äpfel gebunden, sondern kann auch auf Dreiecke, Kreuze, etc. angewendet werden.

Wir wissen auch was passiert wenn wir zuerst 3 Äpfel und dann 2 Äpfel haben.



Dieses Gefühl für addition gilt nicht exklusiv für Äpfel, sondern lässt sich auch auf andere Objekte übertragen.



Wir können Geld genau so gut wie Äpfel, Birnen und Rechtecke addieren. Wir haben also den Begriff der Addition abstrahiert (auf allgemeine Fälle erweitert).

Analog auch die Multiplikation.

Dasselbe machen wir nun mit Vektoren.

Bis jetzt haben wir Vektoren nur als Pfeile im Raum bzw. Ebene kennengelernt. Wir wissen schon wie man mit ihnen rechnet. Nun können Vektoren, genau wie Zahlen, nicht nur Pfeile darstellen, sondern beliebige Objekte z.B.

- Kräfte
- Position
- Liste von Zahlen
- Funktionen usw.

Wir wissen bereits wie wir mit Pfeilen im Raum rechnen können:



Nun wollen wir auch diese Operationen auf alle Anwendungen von Vektoren abstrahieren.

Ausschlaggebend sind dafür die Regeln der Operation nicht die Objekte.

→ Rechenregeln werden zu Axiomen

Wichtige Begriffe:

Vektor → Objekt
z.B. Fruchtkorb

Raum → Menge
Menge von verschieden gefüllten Fruchtkörben

Innere Operation \oplus → Kombination von Objekten aus einer Menge
Ich lege alle Früchte aus verschiedenen Fruchtkörben zusammen.

Äussere Operation \odot → Kombination von Objekten aus Menge mit Skalar
Verfielfachung aller Früchte in einem Korb.

4. Vektorräume

4.1 Definition Vektorraum

Sei V eine Menge von Objekten. V heisst Vektorraum, wenn eine **innere Operation** (Kombination von zwei Objekten) und eine **äussere Operation** (Kombination eines Objekts mit einem Skalar) definiert sind, und folgende Axiome gelten:

<p>Innere Operation:</p> <p>$\oplus: V \times V \rightarrow V$ $(a, b) \mapsto a \oplus b$</p>	<p>Äussere Operation:</p> <p>$\odot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ $(\alpha, a) \mapsto \alpha \odot a$</p>
--	--

Axiome:

Es müssen nun sowohl eine innere Operation, als auch eine äussere Operation definiert werden.

$\oplus: V \times V \rightarrow V$ (\oplus nimmt zwei Vektoren aus der Menge V und ordnet dem Paar $a \leftarrow$ einen anderen Vektor in V zu.)

$(a, b) \mapsto a \oplus b$ (so wird die innere Operation ausgeführt)

$\odot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ (\odot nimmt einen Vektor und einen Skalar und produziert einen neuen Vektor in V)

$(\alpha, a) \mapsto \alpha \odot a$ (so wird die äussere Operation ausgeführt)

Nun müssen, basierend auf den inneren und äusseren Operationen, folgende Axiome gelten.

Axiome:	
(A1) $\forall u, v \in V: u \oplus v = v \oplus u$	Vektoriell Kommutativgesetz
(A2) $\forall u, v, w \in V: (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$	Vektoriell Assoziativgesetz
(A3) $\exists 0 \in V,$ $\forall u \in V: u \oplus 0 = u$	Neutrales Element (Nullvektor)
(A4) $\forall u \in V,$ $\exists -u \in V: u \oplus (-u) = 0$	Inverses Element
(M1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$ $\forall u \in V: (\alpha \cdot \beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$	Skalares Assoziativgesetz
(M2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$ $\forall u, v \in V: (\alpha + \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$ $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$	Distributivgesetz
(M3) $\forall u \in V: 1 \odot u = u$	Neutrales Element

Nun kennen wir alle Regeln und können überprüfen ob beispielsweise die bekannten 2-D Vektorpfeile einen Vektorraum beschreiben. Dafür müssen wir alle Axiome prüfen.

Zusammenfassend:

Wir wollen unsere Vorstellung von Vektoraddition und Multiplikation, von den uns bekannten Vektorpfeilen im Raum und Ebene, auf alle möglichen Vektoren abstrahieren (verallgemeinern). Damit können wir dann später die Eigenschaften von Vektoren auch auf z.B. Funktionen (welche sich als Vektoren darstellen lassen) anwenden.

Unterräume:

Ein Unterraum ist eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums welche folgende Eigenschaften erfüllt.

$$(i) \forall a, b \in U: a + b \in U \quad \rightarrow \text{Summe von zwei Elementen von } U \text{ ist weiterhin Teil von } U$$

$$(ii) \forall a \in U, \alpha \in \mathbb{R}: \alpha \cdot a \in U \quad \rightarrow \text{Wird ein Element von } U \text{ mit einem Skalar multipliziert, so ist das skalierte Element weiterhin Teil von } U.$$

Ein Unterraum ist selber auch ein Vektorraum.

Bsp. I:

Sei V : alle linearen Funktionen der Form: $a(x) = a_1 x + a_2$

und U : alle linearen Funktionen mit Steigung 2: $f(x) = 2x + b$

Ist U ein Unterraum von V ?

$$(i) \forall a, b \in U: a + b \in U$$

$$\rightarrow (2x + b_1) + (2x + b_2) = 4x + b_1 + b_2 \rightarrow \text{nicht Teil von } U$$

U ist kein Unterraum von V

Bsp. II:

Sei V : alle linearen Funktionen der Form: $a(x) = a_1 x + a_2$

und U : alle konstanten linearen Funktionen: $f(x) = b$

Ist U ein Unterraum von V ?

$$(i) \forall a, b \in U: a + b \in U \quad \rightarrow f_1(x) + f_2(x) = b_1 + b_2$$

$$(ii) \forall a \in U, \alpha \in \mathbb{R}: \alpha \cdot a \in U \quad \rightarrow \alpha f_1(x) = \alpha \cdot b_1$$

} Teil von U

U ist ein Unterraum von V

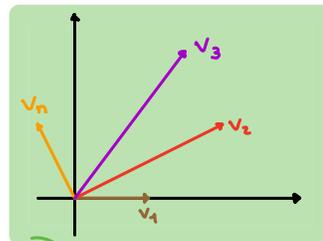
Erzeugendensysteme und Basen:

Sei $v := \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, dann ist v eine Linearkombination von v_1, \dots, v_n . Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $v_1, \dots, v_n \in V$ (V ist ein VR)

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

die Menge aller Linearkombinationen nennt sich **Lineare Hülle** und wird mit $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$ abgekürzt.

Diese Menge aller Linearkombinationen ist ein Vektorraum V . Die Vektoren v_1, \dots, v_n sind dann ein **Erzeugendensystem** von V .



Vektorraum $V = \text{span}(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$

Es lassen sich nun alle Vektoren in V durch eine Linearkombination der Erzeugendenvektoren bilden.

Betrachten wir Beispielsweise 2D Vektorpfeile ($V = \mathbb{R}^2$). Es lassen sich beliebig viele Erzeugendensysteme finden:

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

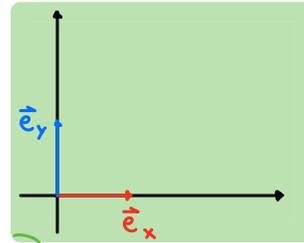
\vdots
etc.

Wenn, alle Vektoren v_1, \dots, v_n eines Erzeugendensystems linear unabhängig sind dann handelt es sich um eine **Basis**. Die Vektoren heissen Basisvektoren.

In 2-D wird oft die „Standardbasis“ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ verwendet.

Wobei: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jeder Vektor kann eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.

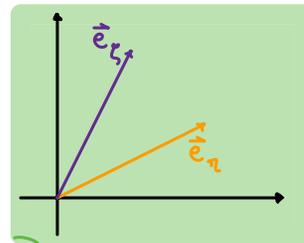


Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

Wir können jedoch auch andere linear unabhängige Vektoren als Basisvektoren verwenden.

Seien z.B. $\vec{e}_\eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Jeder Vektor kann eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.



Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$

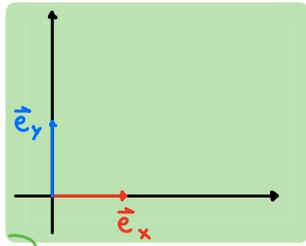
Die Anzahl von Basisvektoren bleibt jedoch erhalten. Diese Anzahl nennt man **Dimension**.

In unserem Fall mit $V = \text{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = \text{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$, hat der VR V die Dimension 2.

- Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:
- A hat vollen Rang
 - $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
 - $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
 - Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung ($x=0$)
 - A ist invertierbar/regulär
 - $\det(A) \neq 0$
 - Zeilen/Spalten sind linear unabhängig
 - Spalten von A sind eine Basis von \mathbb{R}^n

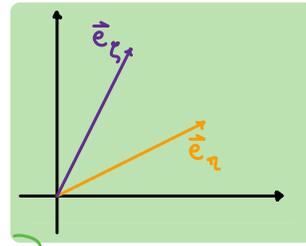
Es ist also möglich mehrere Basen für einen endlichdimensionalen Vektorraum zu finden.

z.B.:



Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

Wobei: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Vektorraum $V = \text{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$

Wobei: $\vec{e}_\eta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Versuchen wir nun einen spezifischen Vektor in der Standardbasis \vec{e}_x, \vec{e}_y und der Basis $\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ auszudrücken. Betrachten wir hierfür zunächst $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, wir erkennen sofort, dass $x_1 = x_2 = 3$ sein muss.

Somit ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{xy}$ der Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis \vec{e}_x, \vec{e}_y .

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ wir erkennen sofort, dass $x_1 = x_2 = 1$ sein muss

nun ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\eta\zeta}$ der Koordinatenvektor bezüglich der Basis $\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$.

Der Koordinatenvektor hängt also von der Basis ab.!

Normierte Vektorräume:

Eine Norm ist eine fixe Regel mit welcher man jedem Vektor, in einem VR, eine reelle positive Zahl zuordnen kann. Dadurch kann man sie dann vergleichen.

Mathematisch lässt sich das wie folgt durch eine Abbildung ausdrücken:

$$\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$$

Es gibt viele Möglichkeiten diese Zuordnung zu machen.

geometrische Länge (Euklidische Norm)

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \rightarrow \quad \|v\|_2 = \sqrt{18}$$

$$\|w\|_2 = \sqrt{17}$$

grösster Eintrag (Maximumsnorm)

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|) \quad \rightarrow \quad \|v\|_\infty = 3$$

$$\|w\|_\infty = 4$$

Achtung! es müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein damit eine Norm vorhanden ist.

$\forall v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten:

1. $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \iff v = 0$

2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

3. $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Beispiele solcher Normen sind:

$$\text{Auf } \mathbb{R}^n \quad \left\{ \begin{array}{l} \|v\|_2 := \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} \quad (\text{Euklidische Norm}) \\ \|v\|_\infty := \max(|v_1|, \dots, |v_n|) \quad (\text{Maximumsnorm}) \\ \|v\|_p := (|v_1|^p + \dots + |v_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (p\text{-Norm}, 1 \leq p < \infty) \end{array} \right.$$

$$\text{Auf } \mathbb{R}^{n \times m} \quad \left\{ \begin{array}{l} \|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \quad (\text{Hilbert-Schmidt-Norm}) \\ \|A\|_{sM} := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{Spaltenmaximumsnorm}) \\ \|A\|_{zM} := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{Zeilenmaximumsnorm}) \end{array} \right.$$

Skalarprodukt:

Wir haben nun ein Tool um die Grösse von Vektoren in einem Vektorraum zu vergleichen. In diesem nächsten Schritt wollen wir die **Beziehung** zwischen zwei Vektoren mit einer reellen Zahl beschreiben. Wieder lässt sich dies durch eine Abbildung beschreiben.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

Wobei folgende Bedingungen erfüllt werden müssen:

$\forall x, y, z \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten:

1. $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
2. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Wenn $\langle x, y \rangle = 0$ dann sind x, y **orthogonal** ($x \perp y$)

Es gibt viele weitere Skalarprodukte! Oft müsst ihr zeigen ob eine Abbildung ein Skalarprodukt ist.

Mit dem Skalarprodukt kann eine Norm induziert werden.

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Diese Norm erfüllt immer alle Bedingung für eine Norm, egal welches Skalarprodukt.

Überblick:

7.1 Definition Vektornorm
Eine Norm im Vektorraum V ordnet jedem Vektor v eine reelle Zahl $\ v\ $ zu und kann so als eine Art Mass verstanden werden.
Sie muss folgende Bedingungen erfüllen:
① $\ v\ \geq 0$ und $\ v\ = 0 \iff v = 0$
② $\ \alpha \cdot v\ = \alpha \cdot \ v\ $
③ $\ v + w\ \leq \ v\ + \ w\ $

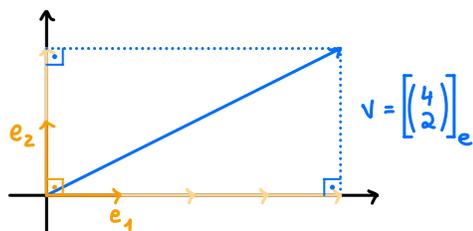
Eine Norm ordnet jedem Vektor eine reelle Zahl zu.

8.1 Definition Skalarprodukt
Ein Skalarprodukt ordnet jedem Paar x, y von Vektoren eine Zahl $\langle x, y \rangle$ zu.
Es muss folgende Bedingungen erfüllen:
① $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
② $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
③ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
④ $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
Beispiele für Skalarprodukte
• Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n : $\langle x, y \rangle = x^T \cdot y$
• Funktionenskalarprodukt: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$
Rechenregeln:
$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, A^T Ay \rangle$
$\cos \phi = \frac{\langle a, b \rangle}{\ a\ \ b\ } \quad \forall a \wedge b \in \mathbb{R}^2$

Ein Skalarprodukt ordnet jedem Vektorpaar eine reelle Zahl zu.

Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Orthonormalbasis (ONB)

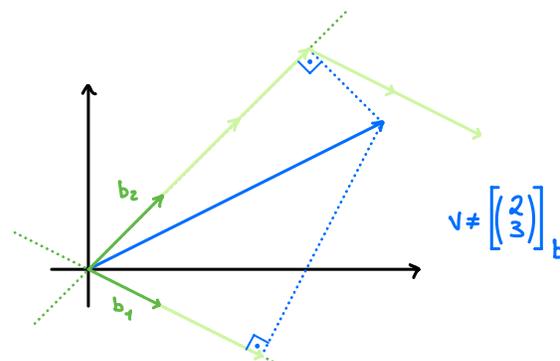


Bei einer Orthonormalbasis stehen die Basisvektoren senkrecht zueinander (orthogonal) und haben die Länge 1 (normal).

z.B.:

$$e = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn einfach orthogonal projizieren.



Bei einer herkömmlichen Basis müssen die Basisvektoren weder orthogonal noch normal sein.

z.B.:

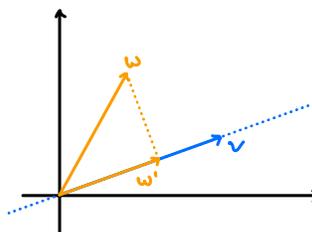
$$b = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn nicht orthogonal projizieren. (LGS lösen)

Orthonormalprojektion:

Ein Vektor w lässt sich auf einen Vektor v wie folgt orthogonal projizieren.

$$w' = \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$



Sei e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis des Vektorraums V , dann gilt $\forall x \in V$:

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

Wie können wir nun eine solche Orthonormalbasis finden? Bzw. Kann ich aus jeder herkömmlichen Basis eine Orthonormalbasis basteln?

Ja!

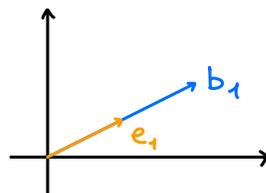
Dazu benutzen wir das **Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren**.

Dafür benötigen wir: eine beliebige Basis $B = \{b_1, \dots, b_k\}$
ein beliebiges Skalarprodukt

und produzieren damit eine Orthonormalbasis $E = \{e_1, \dots, e_k\}$

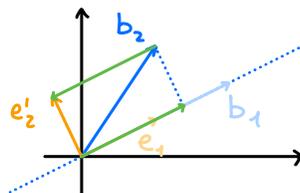
i.) Wähle einen beliebigen ersten Basisvektor b_1 und normiere ihn.

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}}$$



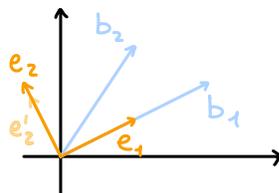
ii.) Wähle einen zweiten Basisvektor b_2 , ziehe zuerst den zu b_1 parallelen Teil ab
Teil ab

$$e'_2 = b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle e_1$$



und normiere ihn dann

$$e_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|} = \frac{e'_2}{\sqrt{\langle e'_2, e'_2 \rangle}}$$



iii.) Wiederhole für jeden weiteren Basisvektor b_i

$$e'_i = b_i - \langle b_i, e_1 \rangle e_1 - \langle b_i, e_2 \rangle e_2 - \dots - \langle b_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}$$

$$e_i = \frac{e'_i}{\|e'_i\|} = \frac{e'_i}{\sqrt{\langle e'_i, e'_i \rangle}}$$

Das kommt SEHR oft bei Prüfungen dran!

4.1 Beispielaufgaben

4.1.1 Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kann $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als eine linear Kombination von v_1, v_2, v_3, v_4 beschrieben werden?

Falls ja, geben Sie eine Linearkombination an.

Lösung:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{-2I+III} \\ \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{array} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{-II+III} \\ \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}$$

$$x_4 = \frac{7}{5}$$

$$x_3 = t$$

$$x_2 = 1 - 2t$$

$$x_1 = 4 - 3 \cdot \frac{7}{5}$$

$$t=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{7}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.1.2 Es sei der Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$U := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

Bestimmen Sie eine Basis von U .

Lösung:

$$x=0 : v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad y=0 : v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad z=0 : v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{aber } v_3 = v_2 - v_1 \quad \text{deshalb } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

4.1.3 Überprüfen Sie ob die folgenden Teilmengen Unterräume sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

- $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3$.
- $\{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^\top = A\} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}$.
- $\{p \in \mathcal{P}_3 \mid p(1) = 0 \text{ und } p(1100) = 0\} \subset \mathcal{P}_3$, wobei \mathcal{P}_n für $n \in \mathbb{N}$ der Vektorraum der Polynome mit Grad $\leq n$ ist.
- $\{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| = |x_3|\} \subset \mathbb{R}^3$

Lösung:

a.) $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3$

✓ Enthält Nullvektor.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

✓ Abgeschlossen bez. Addition

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}$$

✓ Abgeschlossen bez. Multiplikation

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

→ Ist UR

b.) ✓ Enthält Nullvektor. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

✓ Abgeschlossen bez. Addition $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}^T$

✓ Abgeschlossen bez. Multiplikation $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{21} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}^T \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

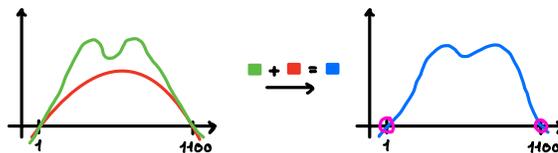
→ Ist UR

c.) ✓ Enthält Nullvektor.

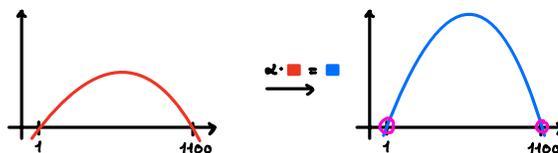
$$p_0 = 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$

$$p_0(1) = 0, \quad p_0(1100) = 0$$

✓ Abgeschlossen bez. Addition



✓ Abgeschlossen bez. Multiplikation



→ Ist UR

d.) ✓ Enthält Nullvektor. $|0| + |0| = |0|$

✗ Abgeschlossen bez. Addition $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow |1| + |-1| = 2 \neq 0$

→ kein UR

4.1.4 Betrachten Sie den Vektorraum \mathcal{P}_3 der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{x^3 + 1, x^2 + x - 2, 2x + 1, x + 2\}$.

- a) Welches Polynom in \mathcal{P}_3 hat die Koordinaten $(2, 1, -1, 3)^T$ bezüglich \mathcal{B} ?
 b) Sei $p(x) := x^3 + x^2 + x + 1$. Bestimmen Sie die Koordinaten von $p(x)$ bezüglich \mathcal{B} .

a.)

$$\begin{aligned} &\rightarrow 2 \cdot (x^3 + 1) + 1 \cdot (x^2 + x - 2) - 1 \cdot (2x + 1) + 3(x + 2) \\ &= 2x^3 + 2 + x^2 + x - 2 - 2x - 1 + 3x + 6 \\ &= 2x^3 + x^2 + 2x + 5 \end{aligned}$$

b.)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \end{array} \xrightarrow{-I+IV} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{l} -II+III \\ 2II+IV \end{array}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \xrightarrow{III \leftrightarrow IV} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{array} \xrightarrow{-2 \cdot III + IV} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{4}{3} \\ x_3 &= 2 - 2x_4 = -\frac{2}{3} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

4.1.5 Sei V der von den Funktionen $\{1, x, x^2, e^x\}$ aufgespannte Vektorraum mit dem Unterraum $U := \{1, x, x^2\}$. Für zwei Funktionen $f, g \in V$ sei das folgende Skalarprodukt definiert:

$$\langle f, g \rangle := f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(0)g''(0) + f'''(0)g'''(0).$$

- Wie lautet die Norm von $f \in V$ bezüglich des gegebenen Skalarprodukts?
- Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis in U bezüglich des gegebenen Skalarprodukts.
- Verifizieren Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tatsächlich ein Skalarprodukt ist.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a.) } \|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ \|f\| &= \sqrt{f(0)^2 + f'(0)^2 + f''(0)^2 + f'''(0)^2} \end{aligned}$$

$$\text{b.) Graham-Schmidt: } b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2$$

$$\rightarrow e_1 = \frac{1}{\|1\|} = 1 \quad \rightarrow e_2' = b_2 - \underbrace{\langle b_2, e_1 \rangle}_{=0} e_1 = x - 0 = x = b_2$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = x$$

$$\rightarrow e_3' = b_3 - \underbrace{\langle b_3, e_2 \rangle}_{=0} e_2 - \underbrace{\langle b_3, e_1 \rangle}_{=0} e_1 = x^2 = b_3$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{x^2}{2}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{B} = \left\{ 1, x, \frac{x^2}{2} \right\}}}$$

$$\text{c.) } x, y, z \in V$$

$$\begin{aligned} \langle x, y+z \rangle &= x(0) [y(0) + z(0)] + x'(0) [y'(0) + z'(0)] + x''(0) [y''(0) + z''(0)] + x'''(0) [y'''(0) + z'''(0)] \\ &= x(0)y(0) + x(0)z(0) + x'(0)y'(0) + x'(0)z'(0) + x''(0)y''(0) + x''(0)z''(0) \\ &\quad + x'''(0)y'''(0) + x'''(0)z'''(0) = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, \alpha y \rangle &= x(0) \alpha y(0) + x'(0) \alpha y'(0) + x''(0) \alpha y''(0) + x'''(0) \alpha y'''(0) \\ &= \alpha [x(0)y(0) + x'(0)y'(0) + x''(0)y''(0) + x'''(0)y'''(0)] = \alpha \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x(0)y(0) + x'(0)y'(0) + x''(0)y''(0) + x'''(0)y'''(0) \\ &= y(0)x(0) + y'(0)x'(0) + y''(0)x''(0) + y'''(0)x'''(0) = \langle y, x \rangle \end{aligned}$$

$$\langle x, x \rangle = x(0)^2 + x'(0)^2 + x''(0)^2 + x'''(0)^2 \geq 0$$

$$\langle f, f \rangle = 0 \rightarrow f \equiv 0, e^x \text{-Term sonst nie Null.}$$

4.1.6 Sei folgendes Skalarprodukt auf \mathcal{P}_4 gegeben

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx.$$

Finden Sie eine Orthonormalbasis für den Vektorraum $\text{span}(1, 3x^4)$.

Lösung:

Graham-Schmidt: $b_1 = 1, b_2 = 3x^4$

$$\rightarrow e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = 1$$

$$\begin{aligned} \rightarrow e'_2 &= b_2 - \underbrace{\langle b_2, e_1 \rangle}_{\int_0^1 3x^4 dx = \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{5}} e_1 \\ &= 3x^4 - \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$e_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|}$$

$$\|e'_2\| = \sqrt{\int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 9x^8 - \frac{18}{5}x^4 + \frac{9}{25} dx} = \frac{4}{5}$$

$$e_2 = \frac{5}{4} \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{4} (5x^4 - 1)$$

5 Lineare Abbildungen

Definition:

Seien V und W reelle Vektorräume. Dann heißt

$$F: V \rightarrow W, \quad x \mapsto F(x)$$

Lineare Abbildung falls $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{i. } F(x+y) = F(x) + F(y) \quad \text{und} \quad \text{ii. } F(\alpha x) = \alpha F(x)$$

wenn wir nun prüfen wollen ob eine Abbildung linear ist, dann müssen wir prüfen ob

i. und ii. gelten

Beispiele:

$\cdot F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto 3x$	i. $F(x+y) = 3(x+y) = 3x + 3y = F(x) + F(y)$ ii. $F(\alpha x) = 3(\alpha x) = \alpha \cdot 3x = \alpha F(x)$] linear
$\cdot F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto 3x + 2$	i. $F(x+y) = 3(x+y) + 2 = 3x + 3y + 2 \neq F(x) + F(y)$	

Weitere Eigenschaften von linearen Abbildungen:

- 0 wird auf 0 abgebildet
- sind V und W endlichdimensional z.B. $V = \mathbb{R}^n, W = \mathbb{R}^m$, dann kann jede lineare Abbildung $F: V \rightarrow W$ durch eine $m \times n$ -Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschrieben werden

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto Ax$$

A heißt dann **Abbildungsmatrix** von F

Beispiel:

$$\cdot F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-2y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen und Matrizen:

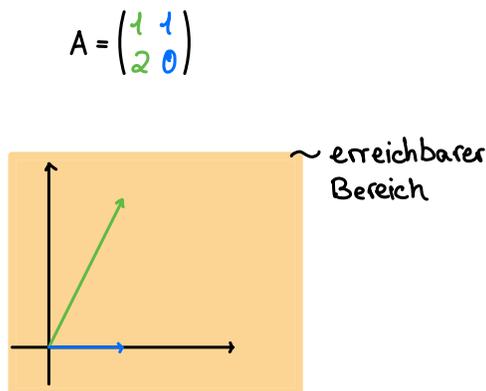
Wie wir gesehen haben, können wir lineare Abbildungen durch eine Matrix beschreiben ($x \mapsto Ax$)
Anhand der Abbildungsmatrix können wir viel über die Abbildung herausfinden.

Bild:

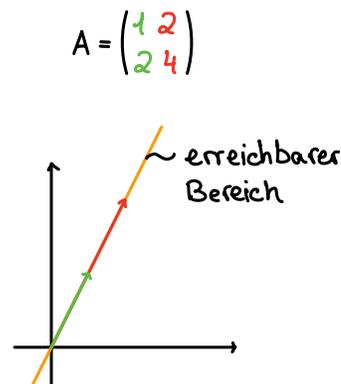
Ganz am Anfang von LinAlg I sahen wir die Matrix-Vektor-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} x_3$$

Das heißt alle möglichen Vektoren die durch das Produkt Ax entstehen können, werden durch die Linearkombination der Spalten von A beschrieben. Zum Beispiel:



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_2$$

Dieser „erreichbare Bereich“ nennt sich **Bild** einer Matrix. Die Dimension des Bildes ist der Rang.

Mathematisch formuliert:

$$\text{Bild}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ sodass } y = Ax \} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

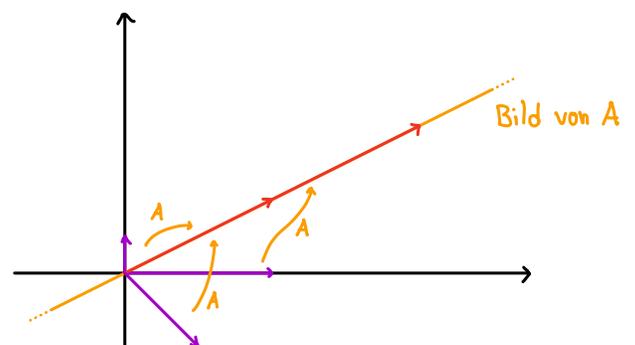
Kern:

Wie gerade gesehen, beschreibt das Bild einer Matrix den Raum auf welchen beliebige Vektoren x durch A abgebildet werden.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



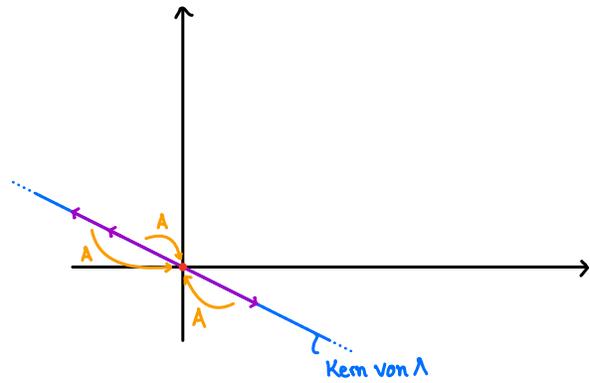
Wir fragen uns nun ob es Vektoren gibt die auf Null abgebildet werden.

D.h. wir suchen alle x , sodass $Ax=0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Mathematisch formuliert: $\text{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax=0\}$

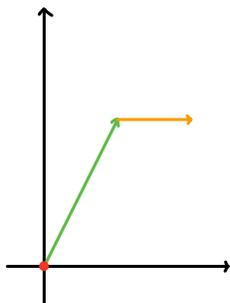
Zusammenhang mit LGS:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rang voll}$$

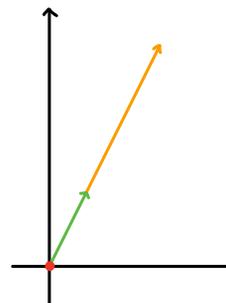
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Rang nicht voll}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_2 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



nur die
triviale Lösung
 $x_1 = x_2 = 0$



unendlich viele
Lösungen

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax=b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax=b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax=0$ hat nur die triviale Lösung ($x=0$)
- A ist invertierbar/regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen/Spalten sind linear unabhängig
- Spalten von A sind eine Basis von \mathbb{R}^n
- Das Bild von A ist n -Dimensional
- Der Kern von A besteht nur aus dem Nullvektor

Zusammenhang:

$$\dim(\text{Kern}) + \dim(\text{Bild}) = n$$

Beweis:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Der **Kern** von A ist die Lösungsmenge des HLGs $Ax=0$. Diese Lösungsmenge hat $n-r$ freie Parameter. Dabei ist r der Rang von A (Anzahl Pivots).

$$\text{z.B. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 9 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_3 = t, x_2 = -\frac{7}{5}t, x_1 = -\frac{6}{5}t \\ r = 2 \quad n = 3 \quad n-r = 1 \end{array}$$

Der Lösungsraum von $Ax=0$ hat also die Dimension 1. Damit hat auch der **Kern** die Dimension 1.

$$\dim(\text{Kern } A) = n-r$$

Durch das Gaussverfahren zum Lösen von $Ax=0$ haben wir die Zeilenstufenform R von A gefunden. Die **Bilder** von A und R lassen sich durch die jeweiligen Spalten beschreiben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bild}(A) = \text{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\} = \text{Bild}(R) = \text{span}\{r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}\}$$

Da A und R die selbe Lösungsmenge beschreiben, spannen sie auch den selben Raum auf.

Dadurch haben sie die selbe Dimension.

Die Dimension von R ist einfach zu bestimmen da sie gleich dem Rang r ist.

$$\dim(\text{Bild}(A)) = \dim(\text{Bild}(R)) = r$$

Dadurch ist $\dim(\text{Kern } A) + \dim(\text{Bild } A) = n-r + r = n$

$$\dim(\text{Kern } A) + \dim(\text{Bild } A) = n$$

Basiswechsel:

Wie wir bereits gesehen haben, können wir für den selben VR verschiedene Basen wählen. Oft kann die Wahl einer bestimmten Basis ein Problem stark vereinfachen. Um von einer Basis in die andere zu wechseln benutzen lineare Abbildungen.

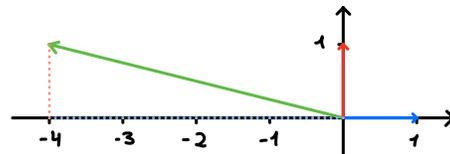
Basiswechsel für Vektoren:

Koordinaten beschreiben um wie viel die Basisvektoren des assoziierten Vektorraums skaliert werden.

D.h. die Koordinaten hängen immer von den Basisvektoren ab!

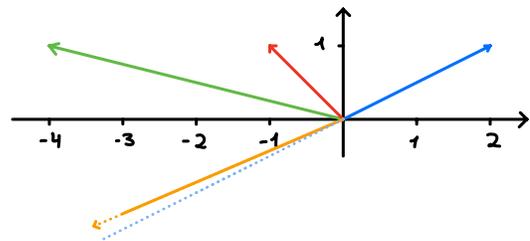
z. B. $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ in der Standardbasis:

$$-4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Würden wir z.B. die Basis mit Basisvektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ wählen und die Koordinaten nicht ändern, würden wir einen anderen Vektor erhalten.

$$-4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

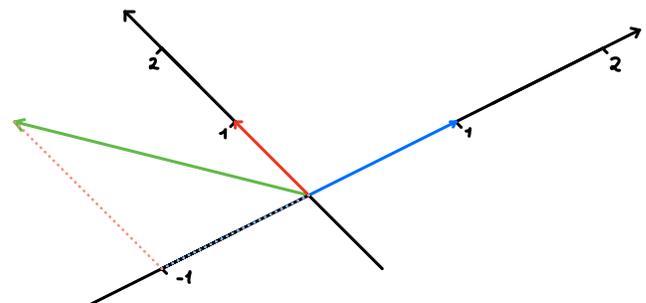


Mit den neuen Basisvektoren wären die richtigen Koordinaten für den selben Vektor

$$-1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In der neuen Basis sind die Koordinaten also $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\text{Standard}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\text{Neu}} \quad \text{beschreiben gleichen Punkt}$$



Wenn wir also von einer Basis in eine andere wechseln, müssen wir auch die Koordinaten ändern.

Dafür führen wir das Konzept der **Übergangsmatrix** ein.

Nennen wir hierfür unsere Standardbasis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ und die andere Basis $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Wir wollen nun von \mathcal{B} nach \mathcal{B}' transformieren.

Wir suchen also die Koordinaten eines Vektors aus \mathcal{B} in der neuen Basis \mathcal{B}' .

Mathematisch ausgedrückt

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

⇓ Form eines LGS in Matrix-Schreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow T_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = T_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}^{-1} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Die Matrix $T_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$ transformiert einen Vektor aus der Basis \mathcal{B}' in die Basis \mathcal{B} . Wir wollen jedoch die Transformation von \mathcal{B} zu \mathcal{B}' . Dafür nehmen wir die Inverse

Unsere Übergangsmatrix ist also $T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} = T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Zusammenfassend:

Für beliebige Basen $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ und $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ gilt:

$$T_{\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{W}} = ([q_1]_{\mathcal{W}}, [q_2]_{\mathcal{W}}, \dots, [q_n]_{\mathcal{W}})$$

$$[v]_{\mathcal{W}} = T_{\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{W}} [v]_{\mathcal{Q}}$$

$$T_{\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{W}} = T_{\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{Q}}^{-1}$$

Basiswechsel für Darstellungsmatrizen:

Wir können nun Vektoren von einer Basis in eine andere transformieren. Nun stellt sich die Frage ob das auch für Matrizen gilt. Denn lineare Abbildungen und deren Darstellungsmatrizen sind auch an eine Basis gebunden.

Sei A eine Darstellungsmatrix einer lin. Abbildung in der Basis q . Dann gilt:

$$[A]_q [x]_q = [y]_q$$

wir suchen nun die Darstellungsmatrix der gleichen Abbildung in der Basis w . Also:

$$[A]_w [x]_w = [y]_w$$

Durch Umformen erhalten wir:

$$[A]_q [x]_q = [y]_q \quad | \cdot T_{Q \rightarrow W}$$

$$T_{Q \rightarrow W} [A]_q [x]_q = T_{Q \rightarrow W} [y]_q \quad | T_{Q \rightarrow W} [y]_q = [y]_w$$

$$T_{Q \rightarrow W} [A]_q [x]_q = [y]_w \quad | I = T_{Q \rightarrow W}^{-1} T_{Q \rightarrow W}$$

$$T_{Q \rightarrow W} [A]_q T_{Q \rightarrow W}^{-1} T_{Q \rightarrow W} [x]_q = [y]_w \quad | T_{Q \rightarrow W} [x]_q = [x]_w$$

$$\underbrace{T_{Q \rightarrow W} [A]_q T_{Q \rightarrow W}^{-1}}_{[A]_w} [x]_w = [y]_w$$

$$[A]_w = T_{Q \rightarrow W} [A]_q T_{Q \rightarrow W}^{-1}$$

Bei einer genauen Betrachtung fällt folgendes auf:

$$[A]_w [x]_w = [y]_w$$

$$T_{Q \rightarrow W} [A]_q T_{Q \rightarrow W}^{-1} [x]_w = [y]_w$$

Transformation des Eingabevektor zu Basis q .

Abbildung in Basis q

Rücktransformation zu Basis w

5.1 Beispielaufgaben

5.1.1 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis für das Bild und den Kern von A .

Lösung:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{array} \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{l} -2\text{I}+\text{II} \\ -3\text{I}+\text{III} \end{array}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \xrightarrow{-\text{II}+\text{III}}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_4 = t, x_3 = s \quad s, t \in \mathbb{R} \\ x_1 = x_3 = s \\ x_2 = -2x_4 - x_3 = -2t - s \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} s \\ -2t-s \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad \text{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Da $\text{Rang}(A) = 2$, nehmen wir zwei lin. unabh. Spalten von A . $\text{Bild}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

5.1.2 Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{P}_2 &\rightarrow \mathcal{P}_2 \\ p(x) &\mapsto p''(x) + 4p'(x) + 3p(x) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von \mathcal{L} bezüglich der Basis \mathcal{B} .

Lösung:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} 3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ erste Spalte von } A.$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} 4 + 3x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ zweite Spalte von } A. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} 2 + 8x + 3x^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ dritte Spalte von } A.$$

5.1.3 Geben seinen die Abbildungen

a) $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2)^\top \mapsto (2x_1 + x_2, x_1)^\top$

b) $\mathcal{G} : \mathcal{C}([x_0, x_1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) \mapsto \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx$

Prüfe ob die Abbildungen \mathcal{F}, \mathcal{G} linear sind.

Tipp: $\mathcal{C}([x_0, x_1], \mathbb{R})$ beschreibt alle stetigen Funktionen auf dem Intervall $[x_0, x_1]$.

Lösung:

a.)
$$\mathcal{F}(x+y) = \begin{pmatrix} 2(x_1+y_1) + x_2+y_2 \\ x_1+y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1+y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$$

$$\mathcal{F}(\alpha x) = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 2x_1 + \alpha \cdot x_2 \\ \alpha \cdot x_1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2x_1+x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha \mathcal{F}(x) \quad \underline{\mathcal{F} \text{ ist linear}}$$

• $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1+x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b.)

$$\mathcal{G}(g+h) = \int_{x_0}^{x_1} g(x)+h(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} h(x) dx = \mathcal{G}(g) + \mathcal{G}(h)$$

$$\mathcal{G}(\alpha g) = \int_{x_0}^{x_1} \alpha \cdot g(x) dx = \alpha \cdot \int_{x_0}^{x_1} g(x) dx = \alpha \mathcal{G}(g) \quad \underline{\mathcal{G} \text{ ist linear}}$$

5.1.4 Gegeben Sei der Vektorraum $V^3 = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis \mathcal{B} . Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

definiert eine lineare Abbildung von V^3 nach V^3 .

a) Durch eine Wahl der neuen Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

werden neue Koordianten eingeführt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix T von \mathcal{B} nach \mathcal{B}' .

b) Durch welche Matrix B wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten beschrieben?

$$a.) T_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \equiv S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}}$$

b.)

$$B = T [A]_{\mathcal{B}} S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.1.5 Betrachten Sie die Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x + 5y - 8z \\ 5x + 3y - 4z \\ -x - 3y + 8z \end{pmatrix}$$

- Geben Sie die Darstellungsmatrix von \mathcal{F} bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 an.
- Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \{b_1 := e_1, b_2 := e_1 + e_2, b_3 := e_2 + e_3\}$ von \mathbb{R}^3 . Finden Sie die Übergangsmatrix T von \mathcal{B} nach \mathcal{E} und ihre Inverse T^{-1} .
- Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von \mathcal{F} bezüglich \mathcal{B} unter Verwendung der Übergangsmatrix T und ihrer Inversen.
- Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von \mathcal{F} und eine Basis des Bildes von \mathcal{F} . Geben Sie ausserdem die jeweiligen Dimensionen an.

Lösung:

$$a.) \quad [F]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$b.) \quad T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c.) \quad [F]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}} [F]_{\mathcal{E}} T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 12 & -6 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$d.) \quad \begin{array}{ccc|c} \hline 7 & 5 & -8 & 0 \\ 5 & 3 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 8 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} \hline 1 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & -12 & 36 & 0 \\ 0 & -16 & 48 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} x_3 = t \in \mathbb{R} \\ x_2 = 3t \\ x_1 = -t \end{array} \quad \text{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \dim = 1$$

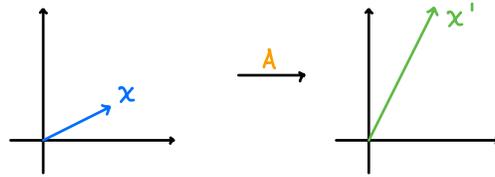
$$\text{Rang}(A) = 2 = \dim(\text{Bild}(A)) = 2$$

$$\text{Bild}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

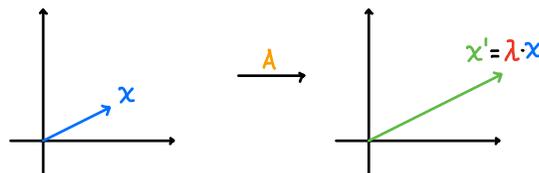
6 Eigenwertproblem

Betrachten wir zunächst eine lineare Abbildung gegeben durch $x \mapsto Ax$ ($A \in \mathbb{C}^{n \times n}$).

Die Abbildung nimmt einen Vektor x und bildet ihn auf den Vektor $x' = Ax$ ab.



Wir fragen uns nun, ob es bestimmte Eingabevektoren x gibt, welche durch die Abbildung $x \mapsto Ax$ nur um einen Faktor λ gestreckt bzw. gestaucht werden.



Wir wissen also, dass in diesem Fall für eine Abbildung, gegeben durch $x \mapsto Ax$, folgendes gelten muss:

$Ax = x' = \lambda \cdot x$. Aus dem bekommen wir dann die allgemeine Gleichung:

$$Ax = \lambda x$$

Der Vektor x welcher durch die Abbildung nur gestreckt bzw. gestaucht wird, nennt sich **Eigenvektor**.

Der Faktor λ , um welchen gestreckt bzw. gestaucht wird, wird **Eigenwert** genannt.

Eigenwerte:

Wir suchen also ein λ sodass $Ax = \lambda x$ gilt. Wobei $x \neq 0$. Durch umstellen erhalten wir ein HLGs der Form:

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Wann hat dieses HLGs nur nicht triviale Lösungen ($x \neq 0$)

3.4 Wichtige Zusammenhänge

Folgende Aussagen sind für $A^{n \times n}$ äquivalent:

- Das homogene LGS $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.
- $\det(A) \neq 0$

Das HLGs hat nicht triviale Lösungen genau dann wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Mit dieser Gleichung können wir nun λ bestimmen.

Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, bestimme alle **Eigenwerte** λ_i von A .

$$\det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & -6-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (3-\lambda)(-6-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\underline{\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -6}$$

Das Polynom $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ heisst **characteristisches Polynom**. Wenn $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dann ist $p_A(\lambda)$ ein Polynom n -ten Grades.

In unserem Beispiel ist der EW 3 eine doppelte Nullstelle des characteristisches Polynoms.

Wir sagen also, dass die **algebraische Vielfachheit** des EW 3, gleich 2 ist. D.h.:

$$\lambda_{1,2} = 3 \text{ mit algebraischer Vielfachheit } 2$$

$$\lambda_3 = -6 \text{ mit algebraischer Vielfachheit } 1$$

Merkmale von EW von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

- i. A hat **mindestens** einen EW $\lambda \in \mathbb{C}$
- ii. A hat **höchstens** n EW $\lambda \in \mathbb{C}$
- iii. A hat **genau** n EW $\lambda \in \mathbb{C}$, wenn man die EW mit ihrer algebraischen Vielfachheit zählt.

Weitere Definitionen zu EW:

- i. Die Menge aller EW von A heisst **Spektrum** von A
- ii. Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heissen **ähnlich**, wenn für eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt $B = T^{-1}AT$. A und B haben dann:
 - das selbe characteristische Polynom
 - die selben EW mit den selben alg. Vf.
 - das selbe Spektrum
 - die selbe Determinante

Eigenvektoren:

Wir wissen nun wie wir EW bestimmen, nun müssen wir noch die dazugehörigen

Eigenvektoren EV bestimmen. D.h. den Vektor x finden für welchen gilt:

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0).$$

Das Problem kann wieder zu $(A - \lambda I)x = 0$ umgeschrieben werden. Nun setzen wir einen der

EW ein und lösen das HLGs. Demnach sind die EV immer mit einem EW verbunden.

Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = 3$ und $\lambda_3 = -6$. Bestimme die EV.

$$v_{\lambda_1}: (A - \lambda_1 I)x = (A - 3I)x = 0$$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = 0 \rightarrow x_3 = t \in \mathbb{R}; x_2 = 0; x_1 = 0$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_{\lambda_3}: (A - \lambda_3 I)x = (A + 6I)x = 0$$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \right) x = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} x = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = -9x_3$$

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_{\lambda_2}: (A - \lambda_2 I)x = (A - 3I)x = 0$$

$$v_{\lambda_1} = v_{\lambda_2}$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Da wir hier ein HLGs mit $\det = 0$ lösen wird es immer unendlich viele Lösungen für $(A - \lambda I)x = 0$ geben. D.h. jede mögliche Linearkombination von EV von einem EW ist auch wieder ein EV. Der dadurch aufgespannte Vektorraum ist dann ein Unterraum und nennt sich **Eigenraum**.

Eigenräume werden mit E_{λ_i} bezeichnet.

Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = 1$ und $\lambda_3 = 4$. Bestimme die EV.

$$E_{\lambda_1} = E_{\lambda_2} = E_1 : (A - \lambda I)x = (A - 1I)x = 0$$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\text{Gauss: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \text{zwei freie Parameter:} \\ x_3 = t; \quad x_2 = s \quad s, t \in \mathbb{R} \\ x_1 = -t - s \end{array}$$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -t-s \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

E_4 analog.

In diesem Beispiel ist also der Eigenraum E_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ beschrieben durch $E_1 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Die Dimension des Eigenraums $\dim(E_{\lambda_i})$ heisst **geometrische Vielfachheit** von λ_i .

In unserem Beispiel ist also die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1 = 1$.

Die geom. Vf ist gleich der Anzahl der freien Parameter im HLG $(A - \lambda I)x = 0$

→ Allgemein ist immer zu beachten, dass für einen EW λ von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gelten muss:

$$1 \leq \text{geom. Vf. von } \lambda \leq \text{alg. Vf. von } \lambda \leq n$$

Diagonalisierung:

Für Abbildungen ist es vorteilhaft wenn die Abbildungsmatrix diagonal ist, da Diagonalmatrizen leicht invertierbar sind und Matrixmultiplikation einfacher ist. Beim Diagonalisieren wollen wir also einen Basiswechsel machen, so dass die Matrix in der neuen Basis diagonal ist.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ wollen wir also eine Matrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ finden, so dass:

$$T^{-1}AT = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

D ist dann die Abbildung A in einer neuen Basis.

Bei Diagonalmatrizen werden Basisvektoren nur um Skalare von der Diagonalen skaliert. D.h. die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.

$$\begin{array}{l} \text{Eigenwerte} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Eigenvektoren} \end{array}$$

Wir wählen also die Eigenvektoren der ursprünglichen Matrix als neue Basis. Der Faktor mit welchem skaliert wird sind genau die Eigenwerte.

Die Übergangsmatrix T enthält dann als Spalten die EV von A . Die Diagonalmatrix D muss nun auf der Diagonalen die EW von A haben. D.h. $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Da wir für eine Diagonalisierung $T^{-1}AT = D$, T^{-1} brauchen muss T regulär sein.

Auf eurer Zusammenfassung steht aber:

6.6 Diagonalisierbarkeit
Eine quadratische Matrix A heißt diagonalisierbar, falls eine reguläre Matrix T existiert, sodass $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.
 A halbeinfach $\iff A$ diagonalisierbar

Was bedeutet es für eine Matrix wenn sie halbeinfach ist?

Eine Matrix A ist halbeinfach wenn jedes λ alg Vf. = g. Vf.

In anderen Worten: Jeder EW λ_i (mit Vf. gezählt) hat einen EV welcher linear unabhängig von allen anderen EV ist. Deshalb gilt auch:

Eigenbasis: Die Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bilden einen Basis für $\mathbb{C}^n \iff$ die Matrix ist halbeinfach.

Recall:

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A ist invertierbar/regulär
- Zeilen/Spalten sind linear unabhängig
- Spalten von A sind eine Basis von \mathbb{R}^n

Dadurch, dass A halbeinfach ist garantieren wir dass T regulär ist und somit ist A diagonalisierbar.

Spezialfall: Symmetrische Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch dann gilt:

- A ist halbeinfach, also diagonalisierbar
- A besitzt eine orthonormale Eigenbasis
- \exists eine orthogonale Matrix T so dass, $T^{-1}AT = T^TAT$ diagonal ist.

Anwendung: Potenzen von Matrizen

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar. Berechne A^3

Da A diagonalisierbar ist gilt: $A = TDT^{-1}$

$$\text{Nun ist } A^3 = A \cdot A \cdot A = (T \underbrace{D T^{-1}}_I) (T \underbrace{D T^{-1}}_I) (T D T^{-1}) = T D^3 T^{-1} = T \operatorname{diag}(\lambda_1^3, \dots, \lambda_n^3) T^{-1}$$

Generell gilt $A^k = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) T^{-1}$

Dadurch vereinfacht sich auch das Matrixexponential $e^A = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) T^{-1}$

↳ durch einsetzen in $e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$

Hauptachsentransformation quadratischer Formen:

Quadratische Formen:

Es gibt quadratische Funktionen in mehreren Variablen. Z.B. in zwei Variablen.

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

Bei genauerer Betrachtung sieht man, dass diese Funktion auch mit einer Matrix beschrieben werden kann

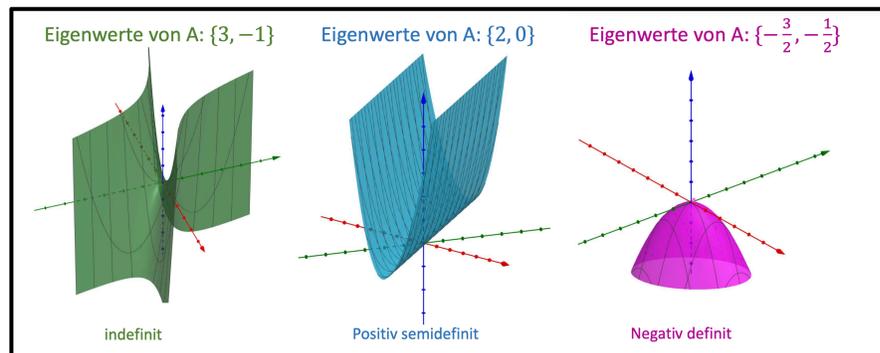
$$q(x_1, x_2) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Hier ist nun $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ die quadratische Form von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Allgemein können wir für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die dazugehörige quadratische Form finden. Sie ist wie folgt definiert: $x \in \mathbb{R}^n$

$$q_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

Je nach Matrix kann die quadratische Form graphisch anders aussehen. Bsp. für 2 Variablen.



Die unterschiedlichen quadratischen Formen lassen sich klassifizieren.

10.2 Definitheit einer quadratischen Form	
Eine quadratische Form heisst:	
• positiv definit:	$q(x) > 0 \forall x \neq 0$
• negativ definit:	$q(x) < 0 \forall x \neq 0$
• positiv semidefinit:	$q(x) \geq 0 \forall x \neq 0$
• negativ semidefinit:	$q(x) \leq 0 \forall x \neq 0$
• indefinit:	sonst
Um die Definitheit einer quadratischen Form zu bestimmen, bestimme man die Definitheit der zugehörigen symmetrischen Matrix A	

10.3 Definitheit einer symmetrischen Matrix	
Variante 1: Bestimmung der Eigenwerte	
Die erste Möglichkeit ist, die Definitheit durch die Eigenwerte zu bestimmen. Eine symmetrische Matrix heisst:	
• positiv definit:	Alle $\lambda > 0$
• negativ definit:	Alle $\lambda < 0$
• positiv semidefinit:	Alle $\lambda \geq 0$
• negativ semidefinit:	Alle $\lambda \leq 0$
• indefinit:	sonst

Eine rein quadratische Form hat keine Mischterme. D.h. sie wird mit einer Diagonalmatrix gebildet:

$$q(x_1, x_2) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 - x_2^2$$

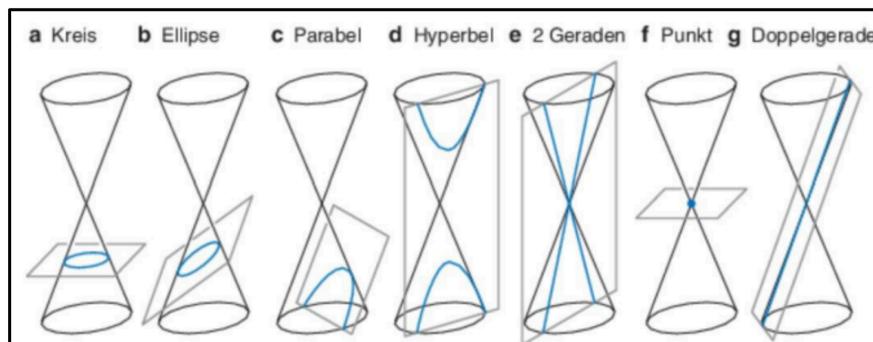
Durch eine Transformation können wir eine nicht reine Form in eine reine Form umwandeln.
 Dafür nehmen wir die EV der Matrix A und wählen sie als neue Basis (Diagonalisieren). Durch diese Transformation bringen wir die quadratische Form in ihre Normalform.

Kegelschnitte:

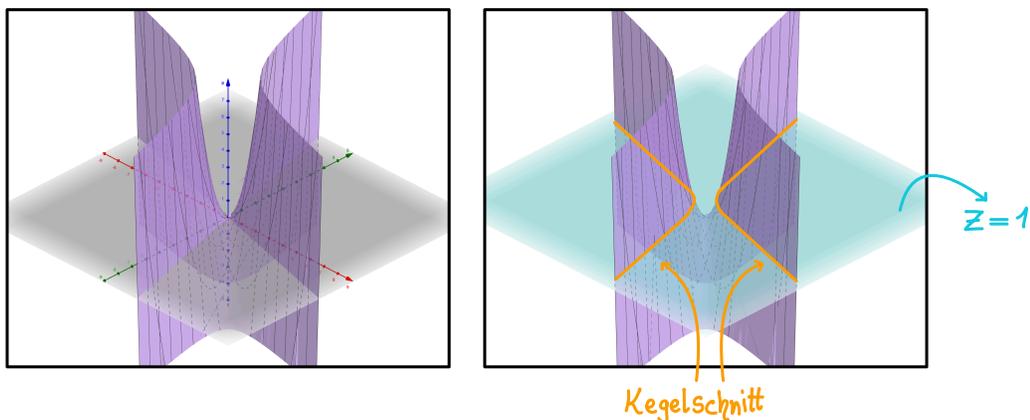
Sei eine quadratische Form q_A für $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ symmetrisch. Dann ist die Niveaumenge

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : q_A(x) = 1\}$$

ein **Kegelschnitt**. Verschiedene symmetrische Matrizen liefern einen dieser **Kegelschnitte**.



Für die quadratische Form $q_A = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$:



Sei eine quadratische Form q_A für $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ symmetrisch. Dann ist die Niveaumenge

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : q_A(x) = 1\}$$

eine **Quadrik** oder Fläche 2. Grades. Verschiedene quadratische Formen liefern verschiedene **Quadriken**

Die Normalformen aller Kegelschnitte sind:

Rang(A) = 2:

- $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Ellipse/Kreis
- $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Hyperbel
- $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + 1 = 0$ leere Menge
- $x^2 + \beta^2 y^2 = 0$ Punkt
- $x^2 - \beta^2 y^2 = 0$ sich schneidendes Geradenpaar

Rang(A) = 1:

- $x^2 - \gamma y = 0$ Parabel
- $x^2 - \alpha^2 = 0$ paralleles Geradenpaar
- $x^2 + \alpha^2 = 0$ leere Menge
- $x^2 = 0$ Gerade

wobei α, β, γ alle $\neq 0$.

Hauptachsentransformation:

10.7 Hauptachsentransformation einer quadr. Form

Wir können durch zwei Koordinatentransformationen (Drehung $y = Tx$ und Verschiebung $z = y + c$) jede quadratische Form rein quadratisch machen.

Während der Koordinatenvektor x die quadratische Form in der Standardbasis darstellt, stellt der Koordinatenvektor z die quadratische Form in der neuen Basis dar.

Die Basis, in der $q(x)$ rein quadratisch wird, ist die Eigenbasis der zugehörigen symmetrischen Matrix A .

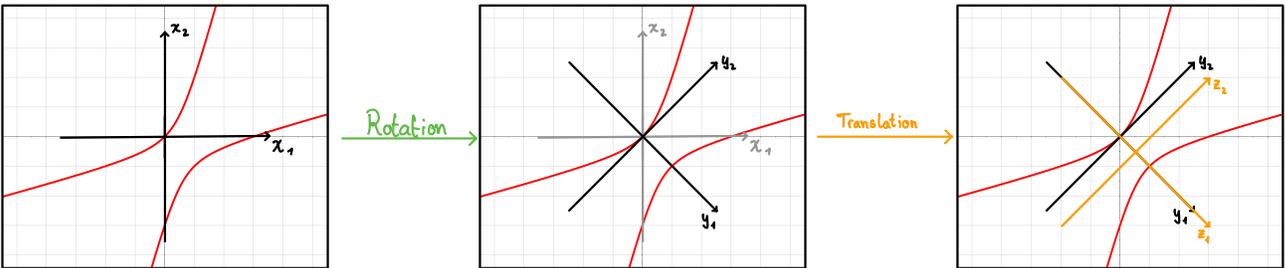
Bsp: $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2$

Vorgehen:

Je nach Aufgabe müssen nicht alle Punkte durchgeführt werden. Für ausschliesslich Hauptachsentransformation reicht 1-3.

- ① Man bestimme die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass $q(x) = x^T A x$
 Trick: $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$
 Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
- ② Man diagonalisiere die Matrix A (siehe 6.6) und bestimme die Transformationsmatrix T . Da A symmetrisch ist, kann T orthogonal gewählt werden und $T^{-1} = T^T$.
T orthogonal wählen! Spalten von T normieren, falls zwei Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert: 8.4
 Bsp: $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ③ Multipliziere aus: $q(y) = y^T \cdot D \cdot y$. Wir haben nun unsere Hauptachsentransformation durchgeführt.
 Bsp: $y^T D y = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$

- ④ Falls in Aufgabe gefragt: Bringe Quadrik $q(x) + a^T x + b = 1$ in Normalform.
 Bestimme $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$.
 Bsp: $q(x) + 2x_3 - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = -\frac{1}{3}$
- ⑤ Schreibe Quadrik in transformierter Form (ausmultiplizieren): $y^T D y + a^T T y + b = 1$
 Bsp: $y^T D y + a^T T y + b = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1 - \frac{1}{3} = 1$
- ⑥ Falls noch lineare Terme übrig: Ergänze quadratisch
 Bsp: $0 = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1 - \frac{4}{3}$
 $= -3(y_1 - \frac{2}{3})^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \frac{4}{3}$
 $= -3((y_1 - \frac{2}{3})^2 - (\frac{2}{3})^2) - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \frac{4}{3}$
 $= -3(y_1 - \frac{2}{3})^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \frac{4}{3} + 3 \cdot (\frac{1}{3})^2$
 $= -3(y_1 - \frac{1}{3})^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - 1$
 Durchführung der zweiten Koordinatentransformation $z = y + c$ (Verschiebung). Man bestimme Vektor c .
 Danach enthält die Gleichung nur noch rein quadratische Terme.
 Bsp: $c = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(z) = -3z_1^2 - 2z_2^2 + 4z_3^2$
- ⑦ Falls gefragt: Gib die zusammengesetzte Koordinatentransformation an: $z = T^T x + c$



6.1 Beispielaufgaben

6.1.1 Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und geben Sie die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten an.

Lösung:

$$\rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & -8 \\ 0 & 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -8 \\ 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda) \underbrace{[(5-\lambda)(-7-\lambda)+32]}_{\lambda_1 = -3} = 0$$

$$(5-\lambda)(-7-\lambda)+32 = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = \underbrace{(\lambda+3)}_{\lambda_2 = -3} \underbrace{(\lambda-1)}_{\lambda_3 = 1} = 0 \quad \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 1$$

alg. vfh. = 2
alg. vfh. = 1

E_{-3} :

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 = t \quad s, t \in \mathbb{R} \\ x_2 = s \\ x_3 = s \end{array} \quad E_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \text{geom. vfh.} = 2$$

E_1 :

$$\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_3 = t \in \mathbb{R} \\ x_2 = 2t \\ x_1 = 2t - t \end{array} \quad E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \text{geom. vfh.} = 1$$

6.1.2 Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und überprüfen Sie ob A diagonalisierbar ist.
- b) Falls möglich, diagonalisieren Sie A , so dass

$$D = T^{-1}AT$$

- c) Kann T orthogonal gewählt werden? Falls ja, geben Sie ein solches T an.

Lösung:

a.) Aus 6.1.1. $p_A(\lambda) = (-3-\lambda)[(5-\lambda)(-7-\lambda)+32] = -(\lambda+3)^2(\lambda-1)$
geom. vfh. = alg. vfh. \Rightarrow Matrix ist halbeinfach \Rightarrow Diagonalisierbar.

b.)

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- c.) T kann nicht orthogonal gewählt werden da A nicht symm. ist.

6.1.3 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie e^A .

Tipp: Das Matrixexponential vereinfacht sich für diagonalisierbare Matrizen als

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) T^{-1}$$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} \rightarrow (5-\lambda)(-4-\lambda)+18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$$

$$E_{-1}: \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x_2 = t \in \mathbb{R} \\ x_1 = x_2 \end{array} \quad E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_2: \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x_2 = t \in \mathbb{R} \\ x_1 = 2x_2 \end{array} \quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-1} & 2e^{-1} \\ e^2 & -e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-1} + 2e^2 & 2e^{-1} - 2e^2 \\ -e^{-1} + e^2 & 2e^{-1} - e^2 \end{pmatrix}$$

6.1.4 Sei die quadratische Form q gegeben durch

$$q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q(x) \mapsto \frac{1}{2}x_1^2 + \sqrt{3}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix A , so dass $q(x) = x^T Ax$.
- b) Führen Sie die Hauptsachentransformation $y = Tx$ durch und geben Sie die Normalform von q an.

Lösung:

a.)
$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

b.)
$$\begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 - \lambda \end{vmatrix} \rightarrow (1/2 - \lambda)(-1/2 - \lambda) - \frac{3}{4} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$E_1: \begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -3/2 \end{vmatrix} \rightarrow E_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_{-1}: \begin{vmatrix} 3/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix} \rightarrow E_{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

T orthogonal. Spalten normieren.

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/4 \\ 1/2 & -3/4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow q(y) = x^T Ax = y^T Dy = (y_1 \ y_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1^2 - y_2^2$$

$$q(y) = y_1^2 - y_2^2$$

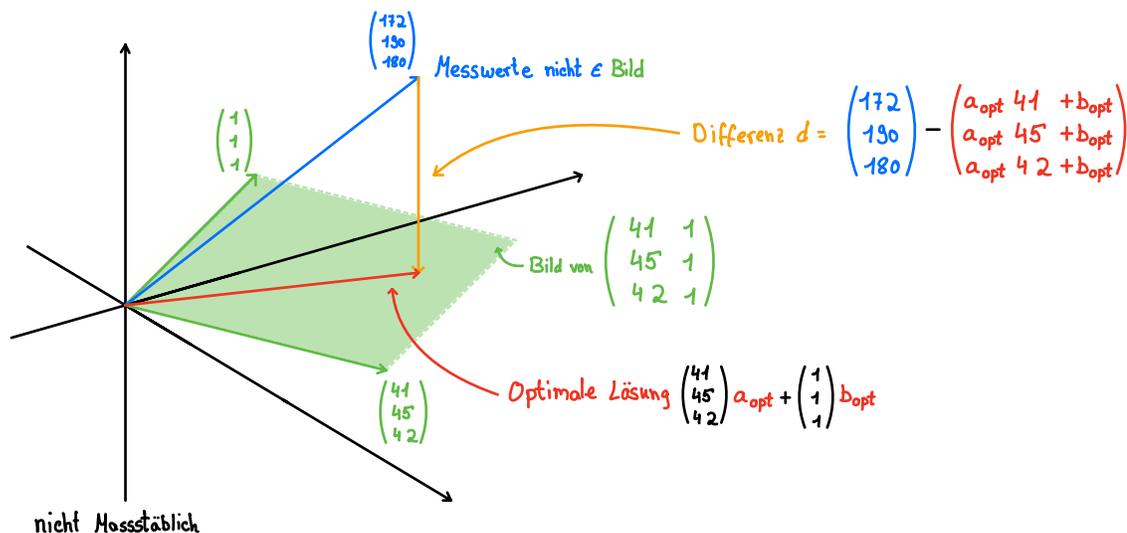
7 Methode der kleinsten Quadrate

Wie können wir eine möglichst gute Lösung für ein überbestimmtes LGS $Ax=c$ finden?

Nehmen wir als Bsp ein System mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten.

$$\begin{aligned} 172 &= a \cdot 41 + b \\ 190 &= a \cdot 45 + b \\ 180 &= a \cdot 42 + b \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 172 \\ 190 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 1 \\ 45 & 1 \\ 42 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Graphisch können wir uns das wie folgt vorstellen:



Wir wollen nun die Länge des Differenzvektors minimieren:

$$\|d\| = \sqrt{(172 - (a \cdot 41 + b))^2 + (190 - (a \cdot 45 + b))^2 + (180 - (a \cdot 42 + b))^2}$$

Wie finde ich nun a und b , so dass die Differenz $d = c - A \cdot \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix}$ minimal ist?

a_{opt} und b_{opt} finden wir durch:

$$A \cdot y \perp d \quad (\text{Bild von } A \text{ orthogonal zu } d)$$

$$\langle A \cdot y, d \rangle = 0$$

$$(A \cdot y)^T \cdot d = 0 \quad (\text{Skalarprodukt ausgeschrieben})$$

$$y^T A^T (c - A \cdot \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix}) = 0 \quad (d \text{ eingesetzt})$$

$$y^T A^T c - y^T A^T A \cdot \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix} = 0$$

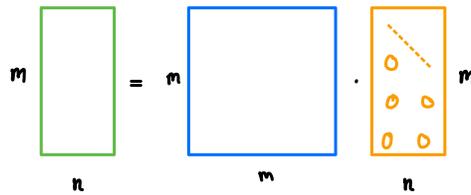
$$A^T c = A^T A \cdot \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A^T A)^{-1} A^T \cdot c = \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix}}$$

QR-Zerlegung:

Idee: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in das Produkt einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und einer Rechtsdreiecksmatrix

$$R \in \mathbb{R}^{m \times n}$$



Anwendung: Die QR-Zerlegung wird für ein alternatives Lösungsverfahren der kleinsten Quadrate gebraucht

welches numerisch bessere Resultate liefert.

Berechnung:

11.2 QR-Zerlegung

Mit der QR-Zerlegung kann eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in das Produkt einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und einer oberen Rechtsdreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ verwandelt werden:

$$A = Q \cdot R$$

Vorgehen:
Wir wollen nacheinander alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen von A eliminieren.

- ① Man wähle zu eliminierendes Element und benenne es a_{ij} .
Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{31}$ soll eliminiert werden
- ② Lese i, j ab und notiere a_{jj}, a_{ij}
Bsp: $i = 3, j = 1 \Rightarrow a_{jj} = 1, a_{ij} = 1$
- ③ Berechne $w = \sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}$
Bsp: $w = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- ④ Man finde die richtige Rotationsmatrix Q'^T . Man nehme zuerst die Identitätsmatrix $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und setze $i_{ii} = \cos(\alpha)$, $i_{ij} = -\sin(\alpha)$, $i_{ji} = \sin(\alpha)$, $i_{jj} = \cos(\alpha)$.
Bsp: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q'^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$
- ⑤ Setze in Rotationsmatrix $\sin(\alpha) = \frac{a_{ij}}{w}$ und $\cos(\alpha) = \frac{a_{jj}}{w}$
Bsp: $Q'^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$
- ⑥ Berechne $Q'^T \cdot A = A'$
Bsp: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$
- ⑦ Falls A' keine obere Dreiecksmatrix, wiederhole (finde Q''^T etc.) bis alle nötigen Elemente eliminiert.
Bsp: $Q''^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}, A'' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ⑧ Wenn $A'' = R$ gefunden, berechne $Q = (Q''^T \cdot Q'^T)^T \Rightarrow A = Q \cdot R$

Anwendung für kleinste Quadrate:

Kleinste Quadrate mit QR-Zerlegung

Löst man ein Optimierungsproblem mit dem Computer, liefert das in 10.1 beschriebene Verfahren ungenaue Lösungen (da numerisch instabil). Das Lösungsverfahren mittels QR-Zerlegung ist besser. **In Aufgabe nur machen, wenn explizit verlangt!**

Vorgehen:

- ① Man bestimme A und c wie bei 10.1.

$$\text{Bsp: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ② Man führe die QR-Zerlegung durch $A = QR$

$$\text{Bsp: } Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ③ Man berechne $d = Q^T \cdot c$

$$\text{Bsp: } d = Q^T \cdot c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

- ④ Man berechne löse das Gleichungssystem $R_0 \cdot \boxed{x} = d_0$, wobei R_0 die extrahierte Dreiecksmatrix aus R ist und d_0 die dazugehörigen oberen Einträge von d

$$\text{Bsp: } R_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

→ optimale Lösung

7.1 Beispielaufgaben

7.1.1 Sei

$$\begin{aligned}x_1 + 0x_2 &= 2 \\x_1 + x_2 &= 1 \\x_1 + 2x_2 &= 0 \\x_1 + 3x_2 &= -1 \\x_1 + 4x_2 &= 1\end{aligned}$$

ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem. Lösen Sie das Ausgleichproblem mittels der Methode der kleinsten Quadrate. Das heisst, finden Sie $(x_1, x_2)^\top$, so dass $\|r\|_2 = \|Ax - c\|_2$ minimal ist.

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}, \quad A^T c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Löse $A^T A x = A^T c$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 10 & | & 3 \\ 0 & 10 & | & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \hat{x}_2 &= -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} \\ \hat{x}_1 &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

7.1.2 Gegeben sei

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - 1 &= r_1 \\x_2 - 3 &= r_2 \\x_2 - 4 &= r_3\end{aligned}$$

Lösen Sie das Ausgleichsproblem mittels der QR-Zerlegung.

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow a_{32} \quad i=3 \quad j=2 \quad a_{22}=1 \quad a_{32}=1 \quad \omega=\sqrt{2}$$

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \sin \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$Q^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg\} R_0$$

$$R_0 x = d_0 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q^T c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \Bigg\} d_0$$

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

8 Lineare Differentialgleichungssysteme

Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Solche Gleichungen sind bereits aus der Analysis bekannt. Allgemein ist eine solche Differentialgleichung

gegeben durch: $y'(t) = \alpha y(t)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, konstant)

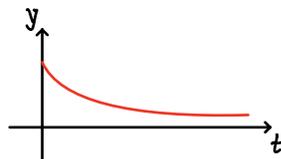
Mit der Lösung: $y(t) = C e^{\alpha t}$, $C \in \mathbb{R}$

Ein konkretes Beispiel hierfür ist: $y'(t) = -2 y(t)$

Mit der Anfangsbedingung: $y(0) = 3$

Die Lösung dieser Gleichung ist dann gegeben durch:

$$y(t) = y(0) e^{-2t} = 3 e^{-2t}$$



Die Lösungsmenge dieser Differentialgleichung $\{y \in C^1(\mathbb{R}) : y' = \alpha y\}$ ist ein 1-D UR von den 1-mal stetig differenzierbaren Funktionen $C^1(\mathbb{R})$.

Systeme homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Genau wie wir auch schon in LinAlg I sahen, können wir Gleichungen in einem System beschreiben. Das geht auch

mit DGL's. Betrachten wir dafür ein Beispiel:

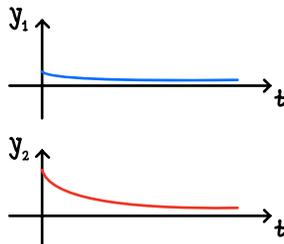
$$\begin{cases} y_1'(t) = -2 y_1(t) & y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) = -4 y_2(t) & y_2(0) = 3 \end{cases}$$

Dieses System ist **entkoppelt** da beide Gleichungen unabhängig von einander sind. Dadurch können

wir sie auch separat lösen.

$$y_1(t) = y_1(0) e^{-2t} = e^{-2t}$$

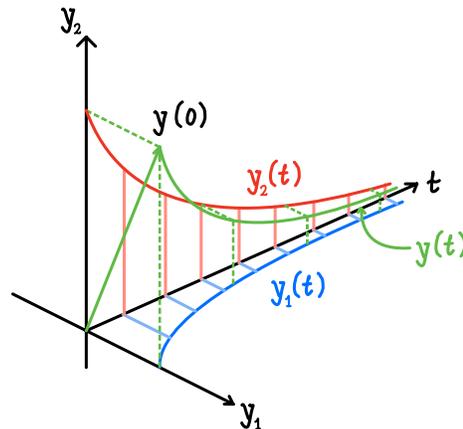
$$y_2(t) = y_2(0) e^{-4t} = 3 e^{-4t}$$



Und da wir in LinAlg sind können wir auch solche Systeme in Matrixschreibweise ausdrücken.

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow y(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Graphisch können wir uns das wie herkömmliche Linearkombinationen vorstellen, bloss das jetzt alles auch von t abhängt



Es kann aber auch sein, dass die Gleichungen abhängig von einander sind, beispielsweise:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -4y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = -2y_1(t) - 3y_2(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das können wir nicht mehr direkt lösen.

Wenn wir die Matrizen der zwei Beispiele vergleichen fällt folgendes auf:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

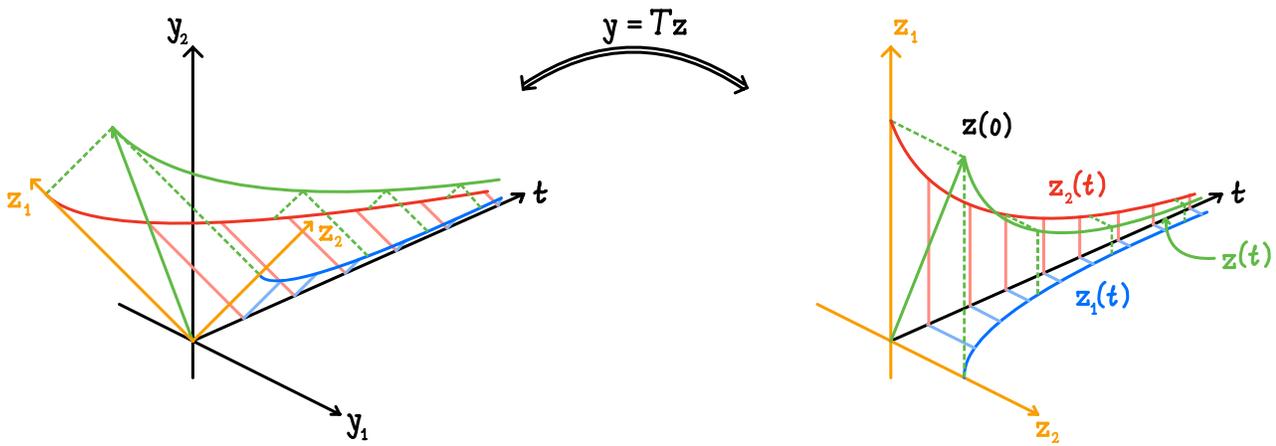
Die Matrix A_1 ist Diagonal! Wenn wir nun unsere Matrix A_2 diagonalisieren, sollten wir das System wie oben lösen können. Wir führen also einen Basiswechsel $y = Tz$ in die Eigenbasis durch

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{y = Tz} \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad z(0) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

In der Basis z können wir das System nun lösen und danach zurück transformieren.

$$z(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-5t} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \implies y(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 4 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} + e^{-5t} \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$



Generell können wir jedes System homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kompakt mit Matrizen darstellen.

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dots = \dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \longrightarrow Y' = AY \quad \text{mit} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Anfangsbedingung ist dann: $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^n$

und die allgemeine Lösung lautet: $Y(x) = e^{Ax} Y_0$

Wenn nun A diagonalisierbar ist, vereinfacht sich die allgemeine Lösung enorm:

$$Y(x) = e^{Ax} Y_0 = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}) T^{-1} Y_0$$

Homogene lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Bis jetzt haben wir nur Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet, also Differentialgleichungen in denen maximal die 1. Ableitung vorkommt. Wie lösen wir aber Differentialgleichungen höherer Ordnung? Betrachten wir hierfür die Gleichung:

$$y'''(t) + 4y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0$$

Durch eine Substitution können wir die Differentialgleichung in ein homogenes lineares System 1. Ordnung umwandeln:

$$\begin{array}{l}
 y_0 := y \\
 y_1 := y' \\
 y_2 := y'' \\
 y_3 := y'''
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 y_1 = y_0' \\
 y_2 = y_1' \\
 y_3 = y_2'
 \end{array} \right\} \longrightarrow \underbrace{y_2'(t) + 4y_2(t) + 2y_1(t) - 3y_0(t) = 0}_{\text{DGL 1. Ordnung mit 3 Variablen.}}$$

Damit die Informationen der Substitution nicht verloren gehen, werden Sie mit Gleichungen in das System eingebunden

$$\begin{array}{l}
 y_0' = y_1 \\
 y_1' = y_2 \\
 y_2' = 3y_0 - 2y_1 - 4y_2
 \end{array}
 \quad \text{oder} \quad
 \begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Sidenote: Die Substitution funktioniert auch bei nicht konst. Koeffizienten und inhomogenen Gleichungen.

8.1 Beispielaufgaben

8.1.1 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = Ay, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} \rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1) = 0 \quad \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$$

$$E_4: \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} x_2 = t \in \mathbb{R} \\ x_1 = \frac{t}{3} \end{array} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1}: \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} x_2 = t \in \mathbb{R} \\ x_1 = -\frac{t}{2} \end{array} \quad E_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$y(x) = c_1 e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

→ Anfangsbedingung:

$$y(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 10 \end{array} \right) \quad c_1 = -c_2 = 2$$

$$y(x) = 2e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

8.1.2 Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(t) = -8y(t) + 4y'(t) \quad (\dagger)$$

- Verwandeln Sie (\dagger) in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Welche Dimension hat der Lösungsraum dieses Systems?
- Geben Sie die allgemeine reelle Lösung des in a) gefundenen Systems an.
- Bestimmen Sie die Lösung von (\dagger) zu den Bedingungen $y(0) = 1, y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Lösung:

a.) $y''(t) = -8y(t) + 4y'(t)$ in System 1. Ordnung umwandeln

Substitution

$$\left. \begin{array}{l} y_0 := y \\ y_1 := y' \\ y_2 := y'' \end{array} \right\} \begin{array}{l} y_1 = y_0' \\ y_2 = y_1' \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} y_1' = -8y_0 + 4y_1 \end{array} \right\} \text{wobei } y_0' = y_1$$

dadurch ergibt sich folgendes Differentialgleichungssystem $y' = Ay$:

$$\begin{array}{l} y_0' = y_1 \\ y_1' = -8y_0 + 4y_1 \end{array} \longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}}$$

$Y' = AY$

Da $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ hat der Lösungsraum die Dimension 2.

b.) Allgemeine Lösung finden

EW:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -8 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(4-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 8 \longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i$$

$$\lambda_1 = 2+2i \quad \lambda_2 = 2-2i$$

EV:

$$E_{2+2i}: \left(\begin{array}{cc|c} -2-2i & 1 & 0 \\ -8 & 4-2-2i & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2-2i & 1 & 0 \\ -8 & 2-2i & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot \frac{-8}{2+2i}} \left(\begin{array}{cc|c} -2-2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$y_1 = s$$

$$(2+2i)y_0 = s \Leftrightarrow y_0 = \frac{s}{2+2i} \quad \text{für } s=4 \quad y_0 = \frac{4}{2+2i} \cdot \frac{2-2i}{2-2i} = \frac{4(2-2i)}{4+4} = 1-i$$

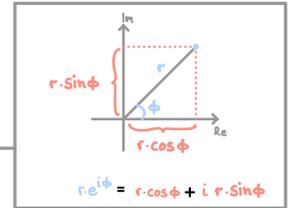
mit komplex konjugiertem erweitern

$$E_{2+2i} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_{2-2i} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{immer komplex-konjugierte Paare})$$

Allgemeine Lösung: $Y(t) = e^{2t} (EV) \rightarrow Y(t) = e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix}$ Diese Lösung ist jedoch komplex!

in reelle Lösung umwandeln:

$$Y(t) = e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} = e^{2t} e^{2it} \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} = e^{2t} (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix}$$



$$= e^{2t} \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t - i \cos 2t + \sin 2t \\ 4 \cos 2t + 4i \sin 2t \end{pmatrix} \right\} = e^{2t} \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ 4 \cos 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin 2t - \cos 2t \\ 4 \sin 2t \end{pmatrix} \right\}$$

Real- und Imaginärteil sind linear unabhängig.

Da der Lösungsraum die Dimension zwei hat, ist die Allgemeine Lösung gegeben durch:

$$y(t) = e^{2t} \{ a(\cos 2t + \sin 2t) + b(\sin 2t - \cos 2t) \}$$

$$y(t) = e^{2t} \{ (a-b)\cos 2t + (a+b)\sin 2t \}$$

c.) Lösungen für folgende Bedingungen: $y(0) = 1, y(\frac{\pi}{4}) = 1$

$$y(t) = e^{2t} \{ (a-b)\cos 2t + (a+b)\sin 2t \}$$

$$\text{i.) } y(0) = e^{0} \{ (a-b)\overset{1}{\cos 0} + (a+b)\overset{0}{\sin 0} \} = (a-b) = 1$$

$$\text{ii.) } y(\frac{\pi}{4}) = e^{\frac{\pi}{2}} \{ (a-b)\overset{0}{\cos \frac{\pi}{2}} + (a+b)\overset{1}{\sin \frac{\pi}{2}} \} = e^{\frac{\pi}{2}} (a+b) = 1 \Leftrightarrow (a+b) = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$y(t) = e^{2t} \{ \cos 2t + e^{-\frac{\pi}{2}} \sin 2t \}$$

8.1.3 Gegeben Sei das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{aligned}y''(t) &= -2y(t) + z(t) \\z'(t) &= -6y(t) + 3z(t)\end{aligned}$$

- a) Verwandeln Sie das Differentialgleichungssystem in ein System 1. Ordnung.
b) Geben Sie die allgemeine Lösung des in a) gefundenen Systems an.

Lösung:

a.) Substitution:

$$\begin{aligned}y' &= x \\y'' &= x' \longrightarrow \begin{aligned}x' &= -2y + z \\y' &= x \\z' &= -6y + 3z\end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

b.) EW und EV berechnen:

$$\begin{aligned}\vdots \\ \lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=2 \quad \text{mit} \quad E_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$