Lineare Algebra I & II

- PVK Skript mit Lösungen -

Nicolas Bartzsch
nbartzsch@ethz.ch

Sommer 2025

0 Vorwort

Dieses Skript basiert auf den Unterlagen meiner Übung der Fächer „Lineare Algebra I" HS23 und „Lineare Algebra II" FS25. Weiterhin wurden Materialien aus den Übungsunterlagen von Robin Frauenfelder und dem PVK Skript von Gioele Zardini übernommen. Dieses Skript wurde für den PVK im Sommer 25 gemacht und soll als Lernhilfe und Repetitorium für den Stoff der beiden Vorlesungen dienen. Es sind Theorie sowie Beispielaufgaben enthalten.

Trotz Revisionen des Skripts kann ich **weder die Vollständigkeit noch die Korrektheit garantieren**. Es ist möglich, dass kleine Fehler enthalten sind. Falls dir ein solcher Fehler auffällt, wäre ich dir dankbar, wenn du mich per E-Mail darüber informierst, damit das Skript korrigiert werden kann.

Eine aktuelle Version dieses Skripts sowie weitere Unterlagen findest du auf meiner Website: `n.ethz.ch/~nbartzsch/`.

Vielen Dank und viel Erfolg mit Lin Alg I & II.

Nicolas Bartzsch

Versionen:
Juni 2024
Juni 2025 (aktuell)

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Gleichungssysteme

Definition:

Gleichungssysteme sind Mengen von Gleichungen mit einer oder mehreren Variabeln.

Wann ist ein Gleichungssystem linear?

→ Wenn die Unbekannten nur in der ersten Potenz vorkommen. Meistens werden die Variabeln mit reellen Skalaren multipliziert.

Bsp: linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 7x_2 = 5 \end{cases}$$

nicht linear:

$$\begin{cases} e^{x_1} + x_2^2 = 6 \\ \frac{1}{x_1} + \cos(x_2) = 2 \end{cases}$$

Notation:

Erweiterte Matrix:

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 5 \\ 6x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 9 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 3 & 2 & 8 & 3 \\ 5 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 1 & 9 \end{array}$$

Matrix-Vektorprodukt $Ax = b$:

$$A := \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{n} \Bigg\} m$$

$m \times n$ Matrix

m Gleichungen

n Unbekannte

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Spaltenvektoren

das Produkt wird definiert als:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \end{pmatrix} = b$$

Lösungsverfahren:

Ein LGS hat entweder:

→ eine eindeutige Lösung

→ unendlich viele Lösungen

→ keine Lösung

Um Lösungen zu finden benutzen wir den Gausschen Algorithmus. Dieser besteht aus elementaren Zeilenumformungen.

I.) vertauschen von zwei Zeilen

II.) addieren eines vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

Die Lösungsmenge bleibt durch diese Operationen unverändert. Mit Hilfe dieser Zeilenumformungen bringen wir das LGS in die Zeilenstufenform. In dieser Form lässt sich das LGS durch Rückwärtseinsetzen lösen und wir können die Pivots identifizieren.

für $m = n$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 3 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 3 & 2 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}$$

für $m \neq n$

○ → Pivot

Die Anzahl Pivots ist auch gleich dem Rang des LGS. Wie können wir nun wissen ob ein LGS eine, keine oder unendlich viele Lösungen hat? Betrachten wir einige LGS in Zeilenstufenform.

$$\text{rang}=3 \left\{ \overbrace{\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{array}}^{n=3} \right.$$

wenn Rang gleich Anzahl Unbekannte.

eindeutige Lösung

$$\text{rang}=2 \left\{ \overbrace{\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}^{n=3} \right.$$

Wenn Rang kleiner als Anzahl Unbekannte und letzte Zeile immer gültig. (Nullzeile)

uendlich viele Lösungen

$$\text{rang}=2 \left\{ \overbrace{\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}}^{n=3} \right.$$

Wenn Rang kleiner als Anzahl Unbekannte und letzte Zeile nie gültig (Verträglichkeitsbedingungen)

Keine Lösung

Geometrische Interpretation:

Zeileninterpretation:

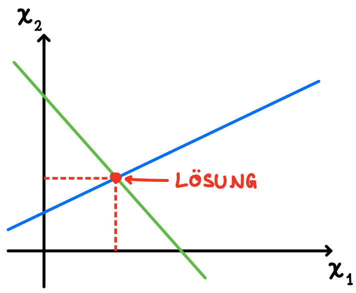
Betrachten wir die einzelnden Zeilen eines 2×2 LGS, so können wir 2 Geraden im 2-D Raum definieren.

Analog in 3-D mit Ebenen.

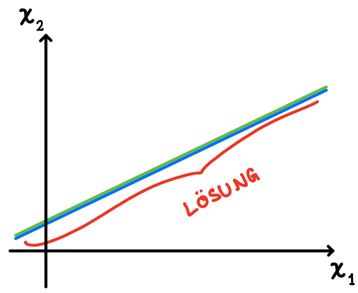
Bsp:

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{x_1}{2} \\ 5x_1 + 1x_2 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 7 - 5x_1 \end{array}$$

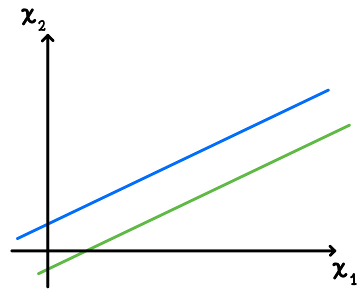
Abhänig von der Lösungsmenge können in 2-D folgende Fälle auftreten.



eindeutige Lösung



unendlich viele Lösungen



keine Lösung

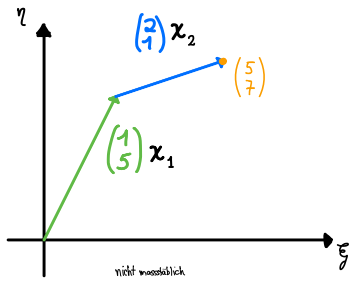
Spalteninterpretation:

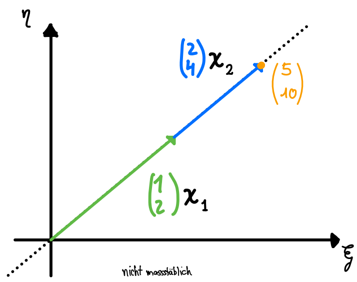
Dafür nehmen wir die Spalten als Vektoren und stellen unser LGS als Linearkombination der Spalten dar. Linearkombination bedeutet hier skalieren und addieren der Vektoren, also $v := \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$

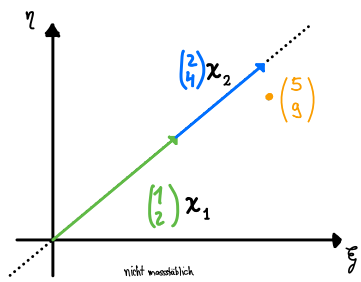
Bsp.:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 5x_1 + 1x_2 &= 7 \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$$

Graphisch:







eindeutige Lösung

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$

unendlich viele Lösungen

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

keine Lösung

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 9 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

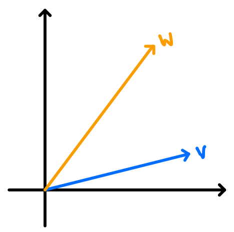
Wenn die Spaltenvektoren wie im ersten Beispiel in unterschiedliche Richtungen zeigen gibt es für jedes b ($Ax = b$) eine eindeutige Lösung. In diesem Fall sagen wir, dass die Spaltenvektoren linear unabhänig sind. Wir erkennen ausserdem, dass der Rang voll ist ($r = m$). Gleichermassen, wenn der Rang nicht voll ist ($r < m$) sind mind. zwei Spalten linear abhängig (zeigen in dieselbe Richtung). Der Rang sagt uns also u.A. wie viele Spaltenvektoren linear unabhängig sind und dadurch auch die Dimension des Lösungsraum

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

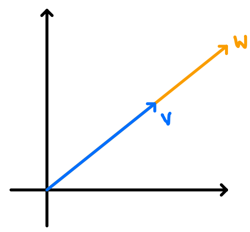
- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig

Lineare Abhänigkeit:

Die lineare (Un)Abhänigkeit ist ein wichtiges Konzept in Lin Alg. Graphisch können wir uns dies wie folgt vorstellen. Im 2-D Fall, wie oben, sind 2 Vektoren linear unabhänig wenn Sie nicht in dieselbe Richtung zeigen, bzw. nicht kollinear sind.

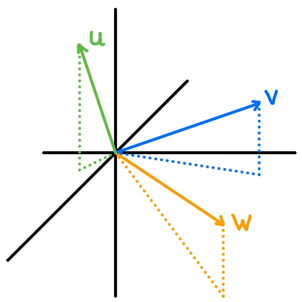


lin. unabhänig
$v \neq \alpha \cdot w$

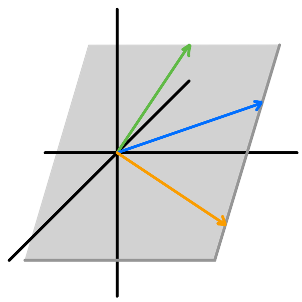


lin. abhänig
$v = \alpha \cdot w$

Im 3-D Fall sind 3 Vektoren linear unabhänig wenn Sie nicht in derselben Ebene liegen bzw. nicht komplanar sind.



lin. unabhänig
$\alpha \cdot v + \beta \cdot w \neq u$



lin. abhänig
$\alpha \cdot v + \beta \cdot w = u$

Allgemein sind die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear unabhänig wenn keiner der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden kann.

1.1 Beispielaufgaben

1.1.1 Für welche Werte des Parameters a hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1 + \quad 4x_2 \quad +5x_3 &= a \\ 1x_1 + \quad ax_2 \quad -2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + \quad 2ax_2 \quad -a^2x_3 &= a \end{aligned}$$

keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie jeweils auch die Lösungsmenge.

Lösung:

Gauss Verfahren anwenden:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} a & 4 & 5 & a \\ 1 & a & -2 & 1 \\ 2 & 2a & -a^2 & a \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -2 & 1 \\ a & 4 & 5 & a \\ 2 & 2a & -a^2 & a \end{array}\right. \begin{array}{l} -a \quad -2 \\ + \\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -2 & 1 \\ 0 & -a^2+4 & 2a+5 & 0 \\ 0 & 0 & 4-a^2 & -2+a \end{array}$$

Nun können wir eine Fallunterscheidung machen:

i. keine Lösung: (Widerspruch in der letzten Zeile)

$$\left.\begin{array}{l} 4-a^2=0 \;\Leftrightarrow\; a^2=4 \;\Leftrightarrow\; a=\pm 2 \\ -2+a \neq 0 \;\Leftrightarrow\; a \neq 2 \end{array}\right\} \quad a=-2.$$

ii. eindeutige Lösung: (keine Nullzeile, voller Rang)

$$4-a^2=-2+a \;\Leftrightarrow\; a^2+a-6=0 \;\Leftrightarrow\; (a-2)(a+3)=0$$

Bei der Option $a=2$ ist die letzte Zeile Null womit der Rang nicht voll ist. Es gilt also $a=-3$.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{x_3}{5} \;\Rightarrow\; x_2 = -\dfrac{1}{5} \\ x_1 = 1+3x_2+2x_3 \;\Rightarrow\; x_1 = \dfrac{12}{5} \end{array}$$

iii. unendlich viele Lösungen: (mindestens eine Nullzeile)

$$\left.\begin{array}{l} 4-a^2=0 \;\Leftrightarrow\; a^2=4 \;\Leftrightarrow\; a=\pm 2 \\ -2+a = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 2 \end{array}\right\} \quad a=2.$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = t,\; t \in \mathbb{R} \\ x_1 = 1+2x_3-2x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = 1-2t \end{array}$$

1.1.2 Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

$$\begin{array}{llll} 0x_1 & +ax_2 & +1x_3 & = -b \\ ax_1 & +0x_2 & +bx_3 & = -1 \\ ax_1 & +ax_2 & +2x_3 & = -2 \end{array}$$

a) eine Lösungsmenge mit *zwei* freien Parametern besitzt.

b) eine Lösungsmenge mit *einem* freien Parameter besitzt.

c) eindeutig lösbar ist.

d) keine Lösung hat.

Geben Sie sie für alle Fälle a), b), c) die Lösungsmenge an.

Lösung:

Gauss Verfahren anwenden:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 0 & a & 1 & -b \\ a & 0 & b & -1 \\ a & a & 2 & -2 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & -1 \\ 0 & a & 1 & -b \\ a & a & 2 & -2 \end{array}\right. \begin{array}{c} -1 \\ \\ + \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & -1 \\ 0 & a & 1 & -b \\ 0 & a & 2-b & -1 \end{array}\right. \begin{array}{c} \\ -1 \\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & -1 \\ 0 & a & 1 & -b \\ 0 & 0 & -b+1 & b-1 \end{array}$$

a) Zwei freie Parameter: $a = 0,\ b = 1$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_3 = -1 \\ x_2 = t,\ t \in \mathbb{R} \\ x_1 = s,\ s \in \mathbb{R} \end{array}$$

b) Ein freier Parameter: $a \neq 0,\ b = 1$

$$\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_3 = t,\ t \in \mathbb{R} \\ x_2 = \dfrac{-1-t}{a} \\ x_1 = \dfrac{-1-t}{a} \end{array}$$

c) Eindeutig lösbar: $a \neq 0,\ b \neq 1$

$$\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & -1 \\ 0 & a & 1 & -b \\ 0 & 0 & -b+1 & b-1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_3 = -1 \\ x_2 = \dfrac{b-1}{a} \\ x_1 = \dfrac{b-1}{a} \end{array}$$

d) Keine Lösung: $a = 0,\ b \neq 1$

2 Matrizen

Was sind Matrizen?

Wir können uns Matrizen veralgemeinernd als "Zahlenfelder" vorstellen.

Eine $m \times n$ Matrix A hat die Form:

$$A = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\right\} m \text{ Zeilen}}_{n \text{ Spalten}} \longrightarrow A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

(Zeilen zuerst, Spalten später)

$a_{ij} = (A)_{ij}$ ist der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

Matrizen mit nur einer Spalte oder Zeile sind Spalten- bzw. Zeilenvektoren

Wichtige Matrizen:

→ Quadratisch $:=$ $m = n$

→ Nullmatrix $:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alle Einträge sind null

→ Obere Dreiecksmatrix
Rechtsdreiecksmatrix $:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $m = n$ und $(A)_{ij} = 0$ für $i > j$

→ Untere Dreiecksmatrix
Linksdreiecksmatrix $:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $m = n$ und $(A)_{ij} = 0$ für $i < j$

→ Diagonalmatrix $:= \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(d_{11}, d_{22}, d_{33})$

→ Einheitsmatrix
Identität $:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$ (wie „1")

Transponieren:

Die Transponierte von A ist A^T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Transponieren ist wie Spiegeln an einer Diagonalen

Ein transponierter Zeilenvektor wird zu einem Spalenvektor und umgekehrt.

→ Symmetrische Matrizen $:=$ $A = A^T$, $m = n$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

→ Antisymmetrische Matrizen $:=$ $A^T = -A$, $m = n$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Rechnen mit Matrizen: $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

Addition: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

→ Einträge werden einzelnd addiert

Subtraktion: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

→ Einträge werden einzelnd subtrahiert

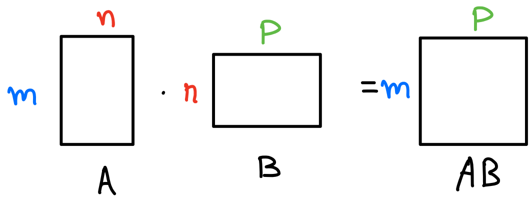
Multiplikation:

- mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$: $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

- mit einer anderen Matrix :

  seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

  nicht alle Matrizen können zusammen multipliziert werden. Bedingun ist:



$m \times \underbrace{n \cdot n}_{\text{Gleich}} \times p = m \times p$

wenn Bedingung erfüllt ist das Produkt definiert durch:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \, (B)_{kj}$$

Formel sieht komplizierter aus als es eigentlich ist.

→ Zusammenfassend: Spalten auf Zeilen legen.

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{2 \times 3 \quad 3}_{=} \times 2 = 2 \times 2 \longrightarrow \text{Bedingung erfüllt}$$

Berechnen wir nun das Ergebnis a_{12}. Dafür brauchen wir:

1. Zeile der erstem Matrix und 2. Spalte der zweiten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$a_{12} = (1 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & 2 \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

Analog für a_{11}, a_{21}, a_{22}

$$a_{11} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad a_{21} = (0 \ 2 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \quad a_{22} = (0 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

Rechenregeln:

$$A + B = B + A$$

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$A(C+D) = AC + AD$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu) A$$

$$\boxed{\text{ACHTUNG: } AB \neq BA}$$

im allgemeinen Fall

Matrix-Vektor Multiplikation: (Spaltenstruktursatz)

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $x^{3\times 1}$ dann ist Ax ein 3×1 Spaltenvektor.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun einige Spezialfälle:

Sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ erste Spalte von A

Wenn nun $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

→ zweite Spalte von A

sei $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

→ zwei mal zweite Spalte

sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

→ erste Spalte + zweite Spalte

Generell gilt für Ax: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$$Ax = \underbrace{x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots x_n a^{(n)}}_{\text{Linearkombination der Spalten von } A} \qquad a^{(j)} = j\text{-te Spalte von } A$$

Was wenn x eine Matrix ist? Seien also $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A \cdot B}$$

Wir können dieses Produkt wie zwei Multiplikationen von Matrix mit Vektor sehen

$$AB = \left(Ab^{(1)} \;\; Ab^{(2)} \;\; \dots \;\; Ab^{(p)} \right)$$

p-te Spalte von B

Dadurch kann man Matrix Multiplikationen in bestimmten Fällen einfach ablesen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

zwei mal erste Spalte

zweite Spalte
+ dritte Spalte

Matrizen als Transformationen:

Matrizen können wir ähnlich wie Funktionen interpretieren. Wenn man einen Vektor mit einer Matrix multipliziert kommt wieder ein Vektor raus. Analog zu einer Funktion $f(x) = y$, wo für jedes x ein y rauskommt. In der Linearen Algebra nennen wir dies Transformation oder Abbildung.

Wenn wir an Matrizen als Transformationen denken, so ist das Multiplizieren von Matrizen wie ein konsekutives Ausführen von Transformationen.

$$ABx = Ax' = x''$$

1.) Zuerst transformiert B den Eingabevektor x. Das generiert den transformierten Vektor x'

2.) Danach transformiert A den bereits transformierten Vektor x' zu x''

Die gesamte Transformation von $x \to x''$ wird dann durch das Produkt $C = A \cdot B$ beschrieben.

Wir können von Matrizen addieren, subtrahieren und multiplizieren.

Können wir auch "dividieren"?

In den reellen Zahlen können wir Division als eine Multiplikation schreiben: $\frac{x}{a} = xa^{-1}$

Inverse Matrizen:

Die $n \times n$ Inverse von einer $n \times n$ Matrix A wird mit A^{-1} bezeichnet. Es gilt:

$$A A^{-1} = \mathbb{I}_n$$

Wenn A eine Inverse besitzt, so nennt man A regulär oder invertierbar.

Bildlich macht A^{-1} die Transformation von A Ruckgänig.

Rechenregeln:

$I^{-1} = I$	$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
$(A^{-1})^{-1} = A$	$rang(A^{-1}) = rang(A)$
$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$	
$(c \cdot A)^{-1} = c^{-1} \cdot A^{-1}$	
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$	

Um nun die Inverse einer beliebigen $n \times n$ Matrix zu berechnen benutzen wir den Gauss-Jordan Algorithmus:

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} - 2 \cdot \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II} - 5\,\mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{-1 \cdot \mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{4\,\mathrm{III} - \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5} \cdot \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II} + \mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2} \cdot \mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Allgemein führen wir folgende Operation durch: $A \,|\, \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I} \,|\, A^{-1}$

Für 2×2 Matrizen gilt ausserdem:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Bsp: Bestimme die Inverse von A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3 - 2 \cdot 1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

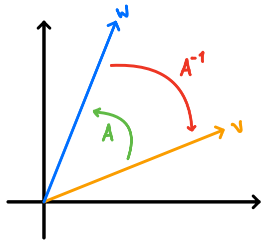
Wenn A eine Inverse besitzt, so nennt man A regulär oder invertierbar.

Wie kann es sein das nicht immer eine Inverse exsistiert?

Oben sahen wir, dass bei einem Produkt zwischen Matrix und Vektor wieder ein Vektor entsteht. Das Resultat kann also als transformierte Version des ursprünglichen Vektors gesehen werden. Mit der Inversen A^{-1} von A können wir die Transformation rückgängig machen. Mathematisch heisst das:

wenn $A \cdot v = w$ dann ist $A^{-1} \cdot w = v$

Die Multiplikation mit A^{-1} macht die Multiplikation von A rückgängig



Das können wir auch in Verbindung mit LGS bringen.

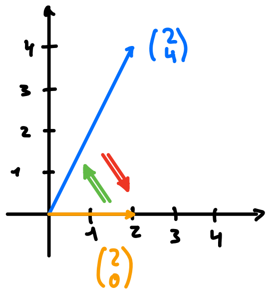
i.) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A_1^{-1}$

Welche Lösung hat dann $A_1 x = b$?

$\longrightarrow$ Es gibt ein eindeutiges x für jedes b

Es kann also eine Matrix existieren, sodass eindeutig

$$A_1^{-1} b = x$$



ii.) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A_2^{-1}$

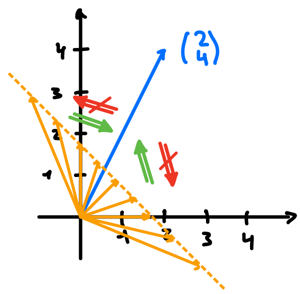
Welche Lösung hat dann $A_2 x = b$?

$\longrightarrow$ Es gibt unendlich viele x für jedes b.

Jedes x der Form $\binom{1}{1} + t \cdot \binom{-1}{1}$ erfüllt die Gleichung

Wir können also keine eindeutige Inverse finden, sodass

$$A_2^{-1} b = x$$



Betrachten wir nochmal genauer A_1 & A_2. Was fällt auf?

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ Rang$(A_1) = 2$ $\quad \Rightarrow$ A ist regulär

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ Rang$(A_2) = 1$ $\quad \Rightarrow$ A ist singulär

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar / regulär
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig

Orthogonale Matrizen:

Eine nxn Matrix heisst orthogonal, falls:

$$A^T A = \mathbb{I}_n \quad \text{bzw.} \quad A^{-1} = A^T$$

→ d.h. orthogonale Matrizen sind u.A. sehr leicht invertierbar!

Orthogonale Matrizen erfüllen immer diese Eigenschaften:

i. Zeilen haben Länge 1 und sind senkrecht aufeinander

ii. Spalten haben Länge 1 und sind senkrecht aufeinander

Bsp: Sei A orthogonal:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

ii. $\sqrt{a_1^2 + a_3^2} \stackrel{!}{=} 1$, $\sqrt{a_2^2 + a_4^2} \stackrel{!}{=} 1$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$

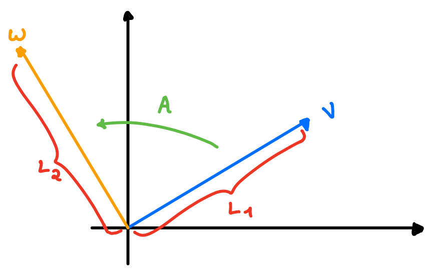
Wenn Bedingungen erfüllt → Orthogonal! (Es reicht eine von beiden i. oder ii.)

Transformationen von orthogonalen Matrizen:

i. Vektoren bleiben gleich lang.

$Av = w$

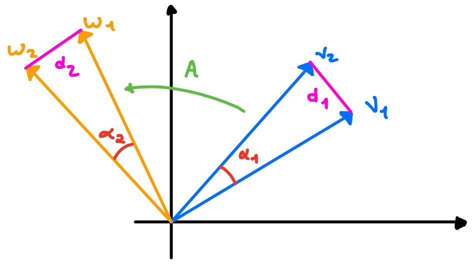
$L_1 = L_2$



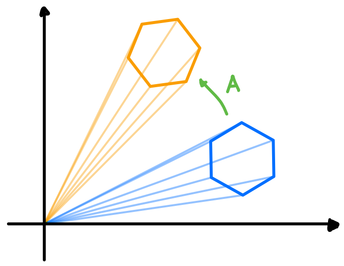
ii. Distanzen bzw. Winkel bleiben erhalten.

$Av = w$

$\alpha_1 = \alpha_2$, $d_1 = d_2$



Insgesamt behalten Formen ihre Geometrie bei.



Beispiele sind Rotationen und Spiegelungen

LR-Zerlegung:

Wie können wir ein LGS der Form $Ax=b$ für viele b schnell lösen?

Idee:

Zerlege $A = LR$

L ist dabei eine Linksdreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$

R ist eine Rechtsdreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix}$

mit hilfe dieser Zerlegung müssen wir nicht mehr Gaussen! Es gilt dann:

$$Ax = LRx = Ly = b$$

d.h. um für ein generelles b zu lösen gehen wir wie folgt vor:

i. $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen

ii. $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

i. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\text{Aus Aufgabe}}$

ii. $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}}_{R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Lösung für } Ax=b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Kochrezept anwenden können! Ist alles auf Zusammenfassung:

2.8 LR-Zerlegung

$$\boxed{A = L \cdot R}$$

Mit der LR-Zerlegung kann man eine quadratische Matrix A in das Produkt einer Linksdreiecksmatrix L sowie einer Rechtsdreiecksmatrix R zerlegen. Dies ermöglicht ein effizienteres Lösen von $Ax = b_i$ mit vielen verschiedenen b_i.

Bsp: Löse $Ax = b$ durch LR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$

Vorgehen:

1. Bringe A durch Zeilensubtraktion in Dreiecksform. Bei erzeugten Nullstellen speichert man, das Wievielfache einer anderen Zeile von dieser Zeile subtrahiert wurde.

   Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \boxed{2} & 2 \end{pmatrix}$

   $\boxed{2}$: Von dieser Zeile wurde das 2-fache einer anderen subtrahiert.

2. Bestimme L und R. L besteht aus den markierten Einträgen und 1 auf der Diagonale, R aus den nichtmarkierten Einträgen.

   Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \boxed{2} & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Löse $Ly = b$ (einfach, da L eine Dreiecksmatrix).

4. Löse $Rx = y$ (einfach, da R eine Dreiecksmatrix).

LRP-Zerlegung mit Permutationsmatrix P

$$\boxed{P \cdot A = L \cdot R}$$

Manchmal ist es notwendig, dass man bei 1 zusätzlich Zeilen vertauschen kann. Dies wird durch eine Permutationsmatrix P möglich.
Hierzu schreibe man zu Beginn die Identitätsmatrix neben A, und macht mit dieser alle Zeilenvertauschungen mit:

Bsp: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Auf der linken Seite steht am Ende die Permutationsmatrix P. L und R werden auf die gleiche Weise wie üblich bestimmt. Bei 3 löse man nun $Ly = Pb$, bei 4 weiterhin $Rx = y$.

2.1 Beispielaufgaben

2.1.1 Was ist

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ -3 & 2 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ -3 & 2 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}?$$

Lösung:

Wir können den komplexen Ausdruck etwas vereinfachen um die Rechnung zu erleichtern.

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ -3 & 2 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ -3 & 2 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{Extrahiert die 2. Spalte der Matrix}}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ -3 & 2 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = x_3$$

Wir müssen also nur x_3 berechnen was durch das Produkt

$$\begin{pmatrix}-3 & 2 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$$

gegeben ist. Das Resultat ist dann -4.

2.1.2 Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Für welche Werte von a ist die Matrix A singulär bzw. regulär? Bestimmen Sie für $a = 0$ die Inverse von A.

Lösung:

Singulär: wenn Zeilen/ Spalten linear abhängig sind.
Regulär: wenn Zeilen/ Spalten linear unabhängig sind.

Für $a = 0.5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall sind die Zeilen I und IV linear abhängig. D.h. die Matrix ist singulär (nicht invertierbar).

Für $a = 0$ wenden wir den Gauss-Jordan Algorithmus an.

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\!\!\!\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}}_{A^{-1}}$$

2.1.3 Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A, so dass $LR = PA$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & 6 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Wir wenden dafür das Rezept an und erhalten

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc|l} 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -2 & + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc|l} 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & -8 & + \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & -35 \end{array}$$

wobei die roten Einträge die Einträge der Matrix L sind. L, R und P sind dann gegeben durch

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -9 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Determinante

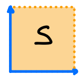
<u>Intuition:</u>

Der orientierte Flächeninhalt des Parallelogramms, welches von zwei Vektoren aufgespannt wird, lässt sich mit dem Kreuzprodukt berechnen.

Betrachten wir zunächst die Fläche die von den Einheitsvektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ beschrieben wird.

Mit dem Kreuzprodukt erhalten wir:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\cdot1-0\cdot0\end{pmatrix}\longrightarrow |1| = 1$$

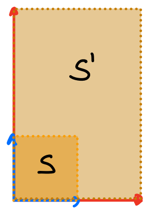


$S = 1$

Was passiert nun mit dem Einheitsquadrat wenn wir auf beide Vektoren eine Matrix A anwenden.

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\rightarrow \quad \begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

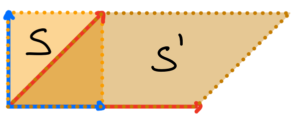
Die Fläche S' lässt sich durch $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=6$ berechnen.
Im Vergleich zum Einheitsquadrat ist die Fläche 6 mal grösser geworden.



Betrachten wir nun ein ähnliches Beispiel indem die Vektoren durch eine Matrix C transformiert werden

$$C=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\rightarrow \quad \begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$S' = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 2$$



Die Fläche ist 2 mal grösser geworden.

Wie können wir diesen Faktor allgemein bestimmen?

Wenden wir uns nochmals an das Einheitsquadrat. Wir nutzen, dass $AB = (Ab^{(1)} \quad Ab^{(2)})$ gilt und somit können wir die transformierten Einheitsvektoren aus dem Produkt AB auslesen. Wobei $b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2 \quad \text{d.h. } AB = A$$

Wir erkennen nun, dass die Spalten der Matrix A die transformierten Einheitsvektoren sind.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir können also direkt aus A die transformierten Einheitsvektoren auslesen und die Definition des Kreuzproduktes anwenden.

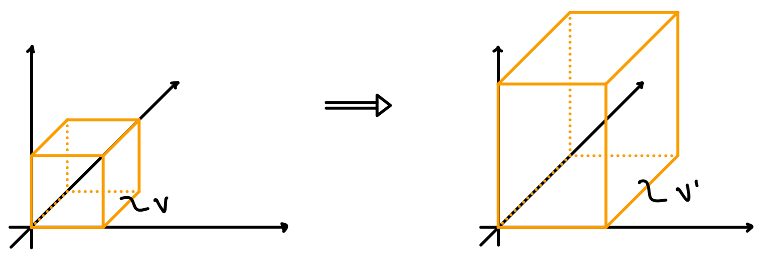
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \rightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = S$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \longrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = \text{Faktor mit welchem Flächen skaliert werden.}$$
$$= \det(A)$$

diese Grösse heisst Determinante.

Erinnerung: Orientierter Flächeninhalt! Eine negative Determinante bedeutet dass die Fläche skaliert und Ihre orientierung invertiert wird.

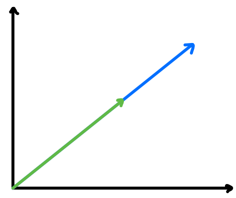
In 3-D beschreibt die Determinante wie sich Volumen verändern:



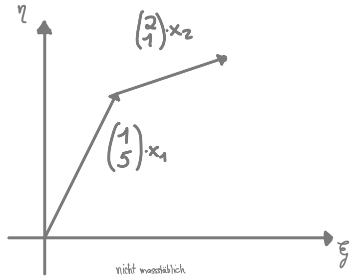
Spezialfall:

Wenn die Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ parallel sind ist die Fläche des, von ihnen aufgespannten, Parallelograms null

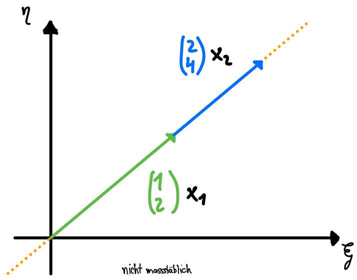
Es gilt dann $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$



Eine 2×2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ hat also $\det = 0$ wenn die Spalten parallel sind. Erinnern wir uns nun an die Spalteninterpretation von LGS der Form $Ax = b$ zurück



Rang voll



Rang nicht voll

sahen wir, dass wenn beide Spalten in die selbe Richtung zeigen bzw. parallel sind, der Rang(A) nicht voll ist. Rang und Determinante hängen also zusammen.

Genauer können wir sagen: Rang(A) ist voll $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar / regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig

Berechnung:

Allgemein

Kann man die Determinante rekursiv definieren:

$$\det A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{oder} \quad \det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Zum ausrechnen mit dem Lapceschen Entwicklungssatz: (für jede nxn Matrix)

$$\text{Sei} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Laplace'scher Entwicklungssatz:
Bei den meisten Matrizen ineffizient. Kann jedoch bei Matrix mit vielen Nullen in einer Zeile oder Spalte geschickt angewendet werden.

1. Zeile oder Spalte auswählen (dort wo viele Nullen).
2. Jedem Element dieser Zeile/Spalte ein Vorzeichen zuordnen (Schachbrett).
3. Für jedes Element die zugehörige Zeile und Spalte streichen und Unterdeterminante bestimmen.
4. Jede Unterdeterminante mit zugehörigem Element und Vorzeichen multiplizieren und addieren.

i.) Zeile /Spalte auswählen (viele Nullen)

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

ii.) Vorzeichen (Schachbrett)

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \qquad \det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

iii.) Unterdeterminanten bestimmen

$$\begin{pmatrix} {}^{+}0 & {}^{-}-2 & {}^{+}3 \\ {}^{-}-2 & {}^{+}1 & {}^{-}-2 \\ {}^{+}3 & {}^{-}6 & {}^{+}5 \end{pmatrix} \qquad \det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Erstes Element der ausgewählten Spalte:

$$\begin{pmatrix} {}^{+}0 & \cancel{-2} & \cancel{3} \\ {}^{-}-2 & 1 & -2 \\ {}^{+}3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow +0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Zweites Element der ausgewählten Spalte:

$$\begin{pmatrix} {}^{+}0 & -2 & 3 \\ {}^{-}-2 & \cancel{1} & \cancel{-2} \\ {}^{+}3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow -(-2) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Drittes Element der ausgewählten Spalte:

$$\begin{pmatrix} {}^{+}0 & -2 & 3 \\ {}^{-}-2 & 1 & -2 \\ {}^{+}3 & \cancel{6} & \cancel{5} \end{pmatrix} \rightarrow +3 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

iv.) Zusammen addieren:

$$\det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = +0\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - (-2)\cdot\det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 3\cdot\det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2(-10-18) + 3(4-3) = -53$$

Spezialformeln:

- Für 2x2:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

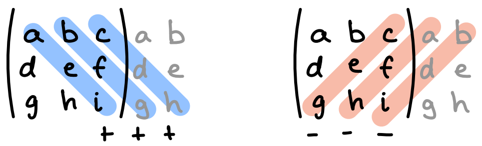
- Für 3x3 gibt es Regel von Sarrus: (Spatprodukt)

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}\right) \underset{\text{Skalarprod.}}{\circ} \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$$

Positiv wenn Vektoren in Multiplikationsreihenfolge ein Rechtssystem bilden.

"Bildlich:"

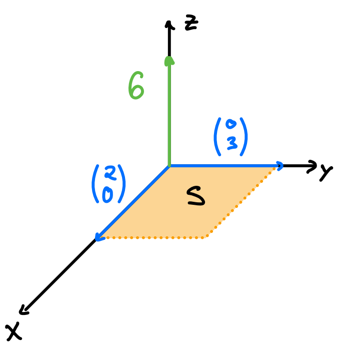


aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb

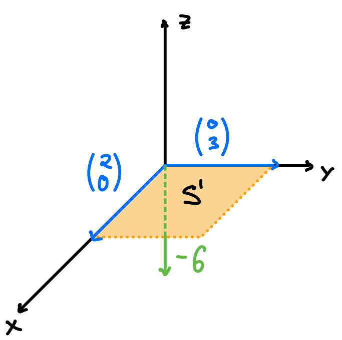
Durch geschicktes modifizieren von A lässt sich die Rechnung vereinfachen. Wir können folgende Modifikationen durchführen.

i.) Vertauschen von Zeilen/Spalten → Vorzeichen der Determinante wechselt

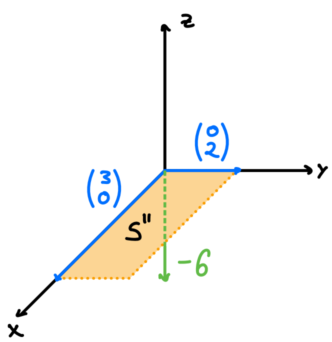
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A'' = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$



$2\cdot 3 - 0\cdot 0 = 6$



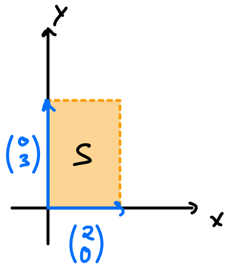
$0\cdot 0 - 3\cdot 2 = -6$

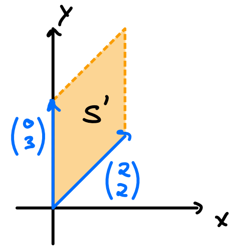


$0\cdot 0 - 2\cdot 3 = -6$

ii.) Bei Spalten-Zeilenaddition bleibt Determinante gleich

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$





$S = 6$ $\qquad$ $S' = 6$

Die Determinante einer Dreiecksmatrix lässt sich einfach bestimmen:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = ad - 0b = ad$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = aei + bf0 + c00 - 0ec - 0fa - i0b = aei$$

Wenn A eine Nullzeile / Nullspalte besitzt, so ist $\det(A) = 0$. Man könnte immer nach der Nullzeile / Nullspalte entwickeln und 0 erhalten.

Besitzt A zwei identische Zeilen so ist $\det(A) = 0$. Der Rang ist nicht voll (es kann eine Nullzeile durch Spalten - Zeilenaddition erzeugt werden.

Alle Regeln sind auch auf der Zsfg.

3.2 Rechenregeln Determinante

Neben den Zeilen/Spalteneigenschaften von 3.1 gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} det(AB) &= det(A) \cdot det(B) \\ det(A^T) &= det(A) \\ det(diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)) &= d_1 \cdot d_2 \cdots d_n \\ det(Dreiecksmatrix) &= d_1 \cdot d_2 \cdots d_n \\ det(A^{-1}) &= 1/det(A) \end{aligned}$$

3.1 Beispielaufgaben

3.1.1 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne $\det(A^\top)$.

Lösung:

$$\begin{aligned} A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A^\top) &= 4 + 24 + 48 - 64 - 6 - 12 \\ &= -6 \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

3.1.2 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechne $\det(A^{-1})$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)} \\ \det(A) &= 4 - 6 = -2 \\ \det(A^{-1}) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

3.1.3 Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\det(M)$

b) Für welche a, b, c, d ist M singulär?

Lösung:

a) Hier benutzten wir den Blocksatz

$$\det \begin{pmatrix} \color{orange}a & \color{orange}0 & \color{orange}0 & \color{orange}0 & \color{red}0 & \color{red}0 \\ \color{orange}1 & \color{orange}-2 & \color{orange}0 & \color{orange}-1 & \color{red}0 & \color{red}0 \\ \color{orange}2 & \color{orange}b & \color{orange}0 & \color{orange}3 & \color{red}0 & \color{red}0 \\ \color{orange}0 & \color{orange}7 & \color{orange}1 & \color{orange}-2 & \color{red}0 & \color{red}0 \\ \color{blue}-1 & \color{blue}4 & \color{blue}0 & \color{blue}7 & \color{green}-1 & \color{green}c \\ \color{blue}5 & \color{blue}1 & \color{blue}d & \color{blue}4 & \color{green}1 & \color{green}2 \end{pmatrix} = \det({\color{orange}\blacksquare}) \cdot \det({\color{green}\blacksquare}),$$

und berechnen die Determinanten der Blöcke einzeln.

$$\det({\color{orange}\blacksquare}) = \begin{vmatrix} a^{+} & 0 & 0 & 0 \\ 1^{-} & -2 & 0 & -1 \\ 2^{+} & b & 0 & 3 \\ 0^{-} & 7^{+} & 1^{-} & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{3. Sp.}}{=} -\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & b & 3 \end{vmatrix} = -(-6a + ab) = 6a - ab$$

$$\det({\color{green}\blacksquare}) = \begin{vmatrix} -1 & c \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - c$$

Schliesslich erhalten wir

$$\det(M) = (6a - ab)(-2 - c) = a(b - 6)(2 + c)$$

b) M ist singulär, wenn $\det(M) = 0$.

$$a(b - 6)(2 + c) = 0$$

M ist singulär, wenn

$$a = 0 \text{ oder } b = 6 \text{ oder } c = -2.$$

3.1.4 Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -3a & 2b & 3c & 2d \\ a & b & -c & d \\ -2a & -2b & -2c & d \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von A.

Lösung:

Durch das Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert die Determinante nicht. Das können wir ausnutzten und anschliessend nach der 3. Zeile entwickeln.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -3a & 2b & 3c & 2d \\ a & b & -c & d \\ -2a & -2b & -2c & d \end{vmatrix} \begin{array}{l} \rceil^{-1} \\ \\ \hookleftarrow_{+} \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} a^{+} & b^{-} & c^{+} & d \\ -3a & 2b & 3c^{-} & 2d \\ 0 & 0 & -2c^{+} & 0 \\ -2a & -2b & -2c & d \end{vmatrix} = -2c \begin{vmatrix} a & b & d \\ -3a & 2b & 2d \\ -2a & -2b & d \end{vmatrix}$$

Schliesslich benutzten wir die Regel von Sarrus, um die 3×3 Determinante zu berechnen.

$$\begin{aligned} \det(A) &= -2c(2abd - 4abd + 6abd + 4abd + 4abd + 3abd) \\ &= -2c(15abd) \\ &= -30abcd \end{aligned}$$

3.1.5 Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & b & b & d \\ b & c & d & d & b & d & a \\ c & d & b & c & d & c & c \\ d & b & c & d & b & b & c \\ b & d & c & b & d & b & b \\ b & c & d & d & b & d & a \\ d & a & c & d & a & b & c \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von A.

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & b & b & d \\ b & c & d & d & b & d & a \\ c & d & b & c & d & c & c \\ d & b & c & d & b & b & c \\ b & d & c & b & d & b & b \\ b & c & d & d & b & d & a \\ d & a & c & d & a & b & c \end{pmatrix} \to II = VI, \text{ also } \det(A) = 0.$$

4 Vektorräume

<u>Intuition:</u>

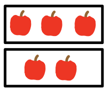
Wenn wir Zählen lernen, entwickeln wir ein abstraktes Gefühl für Zahlen.

⟶ „3"

egal welches Objekt wir können einer gewissen Anzahl Objekten eine Zahl zuweisen.

Die Zahl 3 ist demnach nicht nur an Äpfel gebunden, sondern kann auch auf Dreiecke, Kreuze, etc. angewendet werden.

Wir wissen auch was passiert wenn wir zuerst 3 Äpfel und dann 2 Äpfel haben.



⟶ „5"

Dieses Gefühl für addition gilt nicht exklusiv für Äpfel, sondern lässt sich auch auf andere Objekte übertragen.

⟶ „5"

⟶ „5"

Wir können Geld genau so gut wie Äpfel, Birnen und Rechtecke addieren. Wir haben also den Begriff der Addition abstrahiert (auf allgemeine Fälle erweitert).

Analog auch die Multiplikation.

Dasselbe machen wir nun mit Vektoren.

Bis jetzt haben wir Vektoren v.a. als Pfeile im Raum bzw. Ebene kennengelernt. Wir wissen schon wie man mit ihnen rechnet. Nun können Vektoren, genau wie Zahlen, nicht nur Pfeile darstellen, sondern beliebige Objekte z.B.

→ Kräfte

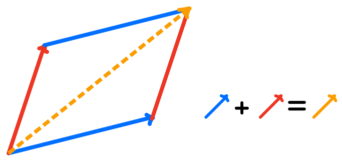
→ Position

→ Liste von Zahlen

→ Funktionen usw.

Wir wissen bereits wie wir mit Pfeilen im Raum rechnen können:

addieren



multiplizieren

Nun wollen wir auch diese Operationen auf alle Anwendungen von Vektoren abstrahieren.

Ausschlaggebend sind dafür die Regeln der Operation <u>nicht</u> die Objekte.

→ Rechenregeln werden zu Axiomen

Wichtige Begriffe:

Vektor ⟶ Objekt

z.B. Fruchtkorb

Raum ⟶ Menge

Menge von verschieden gefüllten Fruchtkörben

Innere Operation $\oplus$ ⟶ Kombination von Objekten aus einer Menge

Ich lege alle Früchte aus verschiedenen Fruchtkörben zusammen.

Äussere Operation $\odot$ ⟶ Kombination von Objekten aus Menge mit Skalar

Verfielfachung aller Früchte in einem Korb.

4. Vektorräume

4.1 Definition Vektorraum

Sei V eine Menge von Objekten. V heisst Vektorraum, wenn eine **innere Operation** (Kombination von zwei Objekten) und eine **äussere Operation** (Kombination eines Objekts mit einem Skalar) definiert sind, und folgende Axiome gelten:

Innere Operation:

$$\oplus\colon\ V \times V \to V, \quad (a,b) \mapsto a \oplus b$$

Äussere Operation:

$$\odot\colon\ \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\alpha,a) \mapsto \alpha \odot a$$

Axiome:

Es müssen nun sowohl eine innere Operation, als auch eine äussere Operation definiert werden.

$\oplus: V \times V \to V$ (⊕ nimmt zwei Vektoren aus der Menge V und ordnet dem Paar einen anderen Vektor in V zu.)

$(a,b) \mapsto a \oplus b$ (so wird die innere Operation ausgeführt)

$\odot: \mathbb{R} \times V \to V$ (⊙ nimmt einen Vektor und einen Skalar und produziert einen neuen Vektor in V)

$(\alpha, a) \mapsto \alpha \odot a$ (so wird die äussere Operation ausgeführt)

Nun müssen, basierend auf den inneren und äusseren Operationen, folgende Axiome gelten.

Axiome:

(A1) $\forall u, v \in V$:	$u \oplus v = v \oplus u$	Vektorielles Kommutativgesetz
(A2) $\forall u, v, w \in V$:	$(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$	Vektorielles Assoziativgesetz
(A3) $\exists 0 \in V$, $\forall u \in V$:	$u \oplus 0 = u$	Neutrales Element (Nullvektor)
(A4) $\forall u \in V$, $\exists -u \in V$:	$u \oplus (-u) = 0$	Inverses Element
(M1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u \in V$:	$(\alpha \cdot \beta) \odot u = \alpha \odot (\beta \odot u)$	Skalares Assoziativgesetz
(M2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$:	$(\alpha + \beta) \odot u = (\alpha \odot u) \oplus (\beta \odot u)$ $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$	Distributivgesetz
(M3) $\forall u \in V$:	$1 \odot u = u$	Neutrales Element

Nun kennen wir alle Regeln und können überprüfen ob eine Menge mit bestimmten Operationen einen Vektorraum beschreibt. Dafür müssen wir alle Axiome prüfen.

Zusamenfassend:

Wir wollen unsere Vorstellung von Vektoraddition und Multiplikation, von den uns bekannten Vektorpfeilen im Raum und Ebene, auf alle möglichen Vektoren abstrahieren (verallgemeinern). Damit können wir dann später die Eigenschaften von Vektoren auch auf andere Objekte (welche sich als Vektoren darstellen lassen) anwenden.

Unterräume:

Ein Unterraum ist eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums welche folgende Eigenschaften erfüllt.

(i) $\forall a,b \in U: \quad a+b \in U$ → Summe von zwei Elementen von U ist weiterhin Teil von U

(ii) $\forall a \in U, \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \cdot a \in U$ → Wird ein Element von U mit einem Skalar multipliziert, so ist das skalierte Element weiterhin Teil von U.

Ein Unterraum ist selber auch ein Vektorraum.

Bsp. I:

Sei V: alle affin-linearen Funktionen der Form: $a(x) = a_1 x + a_2$

und U: alle affin-linearen Funktionen mit Steigung 2 : $f(x) = 2x + b$

Ist U ein Unterraum von V?

(i) $\forall a,b \in U: \quad a+b \in U$

$\rightarrow (2x+b_1)+(2x+b_2) = 4x+b_1+b_2 \longrightarrow$ nicht Teil von U

U ist <u>kein</u> Unterraum von V

Bsp. II:

Sei V: alle affin-linearen Funktionen der Form: $a(x) = a_1 x + a_2$

und U: alle konstanen Funktionen : $f(x) = b$

Ist U ein Unterraum von V?

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i) } \forall a,b \in U: \quad a+b \in U & \longrightarrow f_1(x)+f_2(x) = b_1+b_2 \\ \text{(ii) } \forall a \in U, \alpha \in \mathbb{R}: \quad \alpha \cdot a \in U & \longrightarrow \alpha f_1(x) = \alpha \cdot b_1 \end{array}\right\} \text{Teil von } U$$

U ist ein Unterraum von V

Normierte Vektorräume:

Eine Norm ist eine fixe Regel mit welcher man jedem Vektor, in einem VR, eine reelle positive Zahl zuordnen kann. Dadurch kann man sie dann Vergleichen.
Mathematisch lässt sich das wie folgt durch eine Abbildung ausdrücken:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

Es gibt viele Möglichkeiten diese Zuordnung zu machen. Z.B.:

geometrische Länge (Euklidische Norm)

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

grösster Eintrag (Maximumsnorm)

$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$

Achtung! es müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein damit eine Norm vorhanden ist.
$\forall\, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten:

1. $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$
3. $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Beispiele solcher Normen sind:

$$\text{Auf } \mathbb{R}^n \begin{cases} \|v\|_2 := \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2} & \text{(Euklidische Norm)} \\ \|v\|_\infty := \max(|v_1|, \ldots, |v_n|) & \text{(Maximumsnorm)} \\ \|v\|_p := (|v_1|^p + \ldots + |v_n|^p)^{\frac{1}{p}} & (\text{p-Norm}, 1 \leq p < \infty) \end{cases}$$

$$\text{Auf } \mathbb{R}^{n \times m} \begin{cases} \|A\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} & \text{(Hibert-Schmidt-Norm)} \\ \|A\|_{SM} := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| & \text{(Spaltenmaximumsnorm)} \\ \|A\|_{ZM} := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| & \text{(Zeilenmaximumsnorm)} \end{cases}$$

Skalarprodukt:

Wir haben nun ein Tool um die Grösse von Vektoren in einem Vektorraum zu vergleichen. In diesem nächsten Schritt wollen wir die Beziehung zwischen zwei Vektoren mit einer reellen Zahl beschreiben. Wieder lässt sich dies durch eine Abbildung beschreiben.

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$$

Wobei folgende Bedingungen erfüllt werden müssen:

$\forall\ x,y,z \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ muss gelten:

1. $\langle x,y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$
2. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$
3. $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
4. $\langle x,x \rangle \geq 0$ und $\langle x,x \rangle = 0 \iff x = 0$

Wenn $\langle x,y \rangle = 0$ dann sind x,y orthogonal $(x \perp y)$

Es gibt viele weitere Skalarprodukte! Oft müsst ihr zeigen ob eine Abbildung ein Skalarprodukt ist.

Mit dem Skalarprodukt kann eine Norm induziert werden.

$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x \rangle}$$

Diese Norm erfüllt immer alle Bedingung für eine Norm, egal welches Skalarprodukt.

Überblick:

7.1 Definition Vektornorm

Eine Norm im Vektorraum V ordnet jedem Vektor v eine relle Zahl $||v||$ zu und kann so als eine Art Mass verstanden werden.

Sie muss folgende Bedingungen erfüllen:

① $||v|| \geqslant 0$ und $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

② $||\alpha \cdot v|| = |\alpha| \cdot ||v||$

③ $||v + w|| \leqslant ||v|| + ||w||$

Eine Norm ordnet jedem Vektor eine reelle Zahl zu.

8.1 Definition Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt ordnet jedem Paar x, y von Vektoren eine Zahl $\langle x, y \rangle$ zu.

Es muss folgende Bedingungen erfüllen:

① $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

② $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

③ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

④ $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Beispiele für Skalarprodukte

- Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle = x^T \cdot y$
- Funktionenskalarprodukt: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

Rechenregeln:

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, A^T Ay \rangle$$

$$cos\phi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|} \qquad \forall\ a \wedge b \in \mathbb{R}^2$$

Ein Skalarprodukt ordnet jedem Vektorpaar eine reelle Zahl zu.

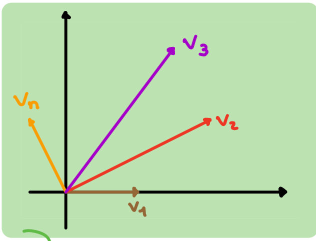
Erzeugendensysteme und Basen:

Sei $v := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, dann ist v eine Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$. Dabei sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und $v_1, \dots, v_n \in$ von einem VR.

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

die Menge aller möglichen Linearkombinationen nennt sich Lineare Hülle und wird mit $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$ abgekürzt.

Diese Menge aller Linearkombinationen ist ein Vektorraum V. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind dann ein Erzeugendensystem von V.



Vektorraum $V = \text{span}(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$

Es lassen sich nun alle Vektoren in V durch eine Linearkombination der Erzeugendenvektoren bilden.

Betrachten wir Beispielsweise 2D Vektorpfeile ($V = \mathbb{R}^2$). Es lassen sich beliebig viele Erzeugendensysteme finden:

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$\vdots$

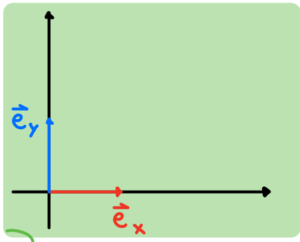
etc.

Wenn, alle Vektoren $v_1, \dots, v_n$ eines Erzeugendensystems linear unabhänig sind dann handelt es sich um eine Basis. Die Vektoren heissen dann Basisvektoren.

In 2-D wird oft die „Standartbasis" $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ verwendet.

Wobei: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Jeder Vektor kann <u>eindeutig</u> als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.

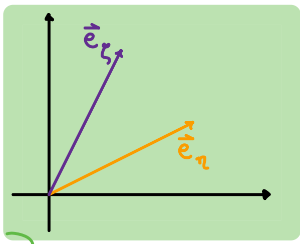


Vektorraum $V = \mathrm{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

Wir können jedoch auch andere, linear unabhänige Vektoren als Basisvektoren verwenden.

Seien z.B. $\vec{e}_\eta = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_\zeta = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Wieder kann jeder Vektor <u>eindeutig</u> als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden.



Vektorraum $V = \mathrm{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$

Die Anzahl der benötigten Basisvektoren bleibt erhalten. Diese Anzahl nennt man Dimension.

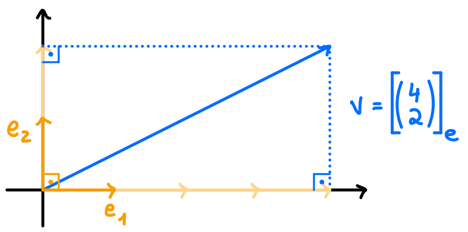
In unserem Fall mit $V = \mathrm{span}(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = \mathrm{span}(\vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$, hat der VR V die Dimension 2.

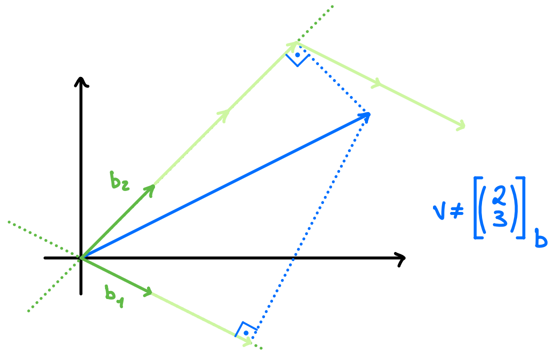
Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar / regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhänig
- Spalten von A sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$

Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Orthonormalbasis (ONB)





Bei einer Orthonormalbasis stehen die Basisvektoren senkrecht zueinander (orthogonal) und haben die Länge 1 (normal).

z.B.: $e = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn einfach orthogonal projizieren.

Bei einer nicht ortho-normalen Basis müssen die Basisvektoren weder orthogonal noch normal sein.

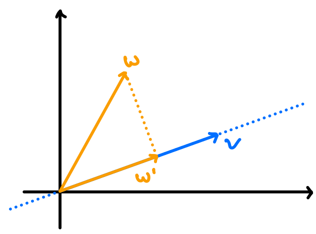
z.B.: $b = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$

Will man einen Vektor in dieser Basis darstellen, dann kann ihn nicht orthogonal projizieren. (LGS lösen)

Orthonormalprojektion:

Ein Vektor w lässt sich auf einen Vektor v wie folgt orthogonal projizieren.

$$w' = \frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\, v$$



Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis des Vektorraums V, dann gilt $\forall x \in V$:

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k}$$

Wie können wir nun eine solche Orthonormalbasis finden? Bzw. Kann ich aus jeder herkömmlichen Basis eine Orthonormalbasis basteln?

Ja!

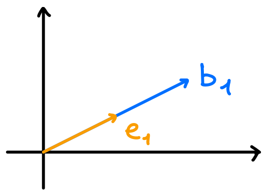
Dazu benutzen wir das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren.

Dafür benötigen wir: eine beliebige Basis $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ und
ein beliebiges Skalarprodukt

und produzieren damit eine Orthonormalbasis $E = \{e_1, \dots, e_k\}$

i.) Wähle einen beliebigen ersten Basisvektor b_1 und normiere ihn.

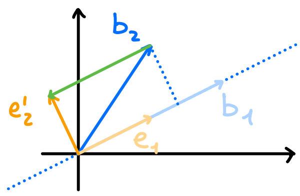
$$e_1 = \frac{b_1}{\| b_1 \|} = \frac{b_1}{\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}}$$



ii.) Wähle einen zweiten Basisvektor b_2, ziehe zuerst den zu b_1 parallelen Teil ab

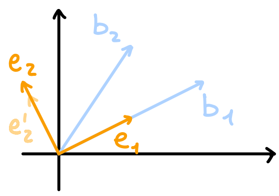
projektion von b_2 auf e_1

$$e_2' = b_2 - \boxed{\langle b_2, e_1 \rangle \, e_1}$$



und normiere ihn dann

$$e_2 = \frac{e_2'}{\| e_2' \|} = \frac{e_2'}{\sqrt{\langle e_2', e_2' \rangle}}$$



iii.) Wiederhole für jeden weiteren Basisvektor b_i

$$e_i' = b_i - \langle b_i, e_1 \rangle \, e_1 - \langle b_i, e_2 \rangle \, e_2 - \dots - \langle b_i, e_{i-1} \rangle \, e_{i-1}$$

$$e_i = \frac{e_i'}{\| e_i' \|} = \frac{e_i'}{\sqrt{\langle e_i', e_i' \rangle}}$$

Das Kommt SEHR oft bei Prüfungen dran!

4.1 Beispielaufgaben

4.1.1 Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kann $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als eine Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4 beschrieben werden? Falls ja, geben Sie eine Linearkombination an.

Lösung:

Dafür lösen wir folgendes LGS:

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right. \begin{array}{l} -2 \\ \\ + \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -6 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ -1 \\ + \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -7 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_4 = \frac{7}{5} \\ x_3 = t \\ x_2 = 1 - 2t \\ x_1 = 4 - 3\frac{7}{5} \end{array}\right\} \xrightarrow{t=1} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{7}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.1.2 Es sei der Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$U := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

Bestimmen Sie eine Basis von U.

Lösung:

$$x = 0: \ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ y = 0: \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ z = 0: \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aber $v_3 = v_2 - v_1$, also ist $\{v_1, v_2\}$ bereits eine Basis von U.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

4.1.3 Überprüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen Unterräume sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3$.

b) $\{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^\top = A\} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) $\{p \in \mathcal{P}_3 \mid p(1) = 0 \text{ und } p(1100) = 0\} \subset \mathcal{P}_3$, wobei $\mathcal{P}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ der Vektorraum der Polynome mit Grad $\leq n$ ist.

d) $\{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| = |x_3|\} \subset \mathbb{R}^3$

Lösung:

a)

Enthält den Nullvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Abgeschlossen bez. Addition: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}$

Abgeschlossen bez. Multiplikation: $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Unterraum.

b)

Enthält den Nullvektor: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Abgeschlossen bez. Addition:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Abgeschlossen bez. Multiplikation: $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^\top \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

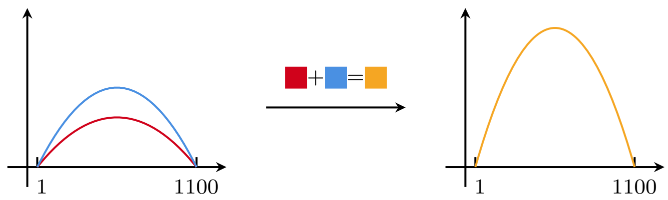
$\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A^\top = A\} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ ist ein Unterraum.

c)

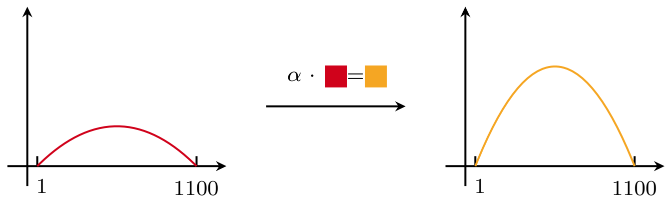
Enthält den Nullvektor: $p_0(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$.

$$p_0(1) = 0 \quad \text{und} \quad p_0(1100) = 0.$$

Abgeschlossen bez. Addition:



Abgeschlossen bez. Multiplikation:



$\{p \in \mathcal{P}_3 \mid p(1) = 0 \text{ und } p(1100) = 0\} \subset \mathcal{P}_3$ ist ein Unterraum.

d)

Enthält den Nullvektor: $|0| + |0| = |0|$

Abgeschlossen bez. Addition:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |1| + |-1| = |2| \neq |0|$$

Nicht abgeschlossen bez. Addition, also kein Unterraum.

4.1.4 Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{P}_3$ der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{x^3+1, x^2+x-2, 2x+1, x+2\}$.

a) Welches Polynom in $\mathcal{P}_3$ hat die Koordinaten $(2,1,-1,3)^\top$ bezüglich $\mathcal{B}$?

b) Sei $p(x) := x^3+x^2+x+1$. Bestimmen Sie die Koordinaten von $p(x)$ bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} p(x) &= 2(x^3+1) + 1(x^2+x-2) - 1(2x+1) + 3(x+2) \\ &= 2x^3 + 2 + x^2 + x - 2 - 2x - 1 + 3x + 6 \\ &= 2x^3 + x^2 + 2x + 5. \end{aligned}$$

b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \end{array}\right) \to \begin{aligned} x_4 &= \frac{4}{3} \\ x_3 &= -\frac{2}{3} \\ x_2 &= 1 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

Die Koordinaten von $p(x)$ bezüglich $\mathcal{B}$ sind also

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

4.1.5 Sei V der von den Funktionen $\{1, x, x^2, e^x\}$ aufgespannte Vektorraum mit dem Unterraum $U := \{1, x, x^2\}$. Für zwei Funktionen $f, g \in V$ sei das folgende Skalarprodukt definiert:

$$\langle f, g\rangle := f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(0)g''(0) + f'''(0)g'''(0).$$

a) Wie lautet die Norm von $f \in V$ bezüglich des gegebenen Skalarprodukts?

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis in U bezüglich des gegebenen Skalarprodukts.

c) Verifizieren Sie, dass $\langle . , . \rangle$ tatsächlich ein Skalarprodukt ist.

Lösung:

a) $$||f|| = \sqrt{f(0)^2 + f'(0)^2 + f''(0)^2 + f'''(0)^2}$$

b) Gram-Schmidt: $b_1 = 1,\ b_2 = x,\ b_3 = x^2$

$$\to e_1 = \frac{1}{||1||} \qquad \to e_2' = b_2 - \underbrace{\langle b_2, e_1\rangle}_{=0} e_1 = x$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{||e_2'||} = x$$

$$\to e_3' = b_3 - \underbrace{\langle b_3, e_2\rangle}_{=0} e_2 - \underbrace{\langle b_3, e_1\rangle}_{=0} e_1 = x^2$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{||e_3'||} = \frac{x^2}{2} \qquad \mathcal{B} = \left\{1, x, \frac{x^2}{2}\right\}$$

c) $x, y, z \in V$

$$\begin{aligned}
\langle x, y+z\rangle &= x(0)[y(0)+z(0)] + x'(0)[y'(0)+z'(0)] + x''(0)[y''(0)+z''(0)] \\
&\quad + x'''(0)[y'''(0)+z'''(0)] \\
&= x(0)y(0) + x(0)z(0) + x'(0)y'(0) + x'(0)z'(0) + x''(0)y''(0) \\
&\quad + x''(0)z''(0) + x'''(0)y'''(0) + x'''(0)z'''(0) = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x, \alpha y\rangle &= x(0)(\alpha y(0)) + x'(0)(\alpha y'(0)) + x''(0)(\alpha y''(0)) + x'''(0)(\alpha y'''(0)) \\
&= \alpha\,[x(0)y(0) + x'(0)y'(0) + x''(0)y''(0) + x'''(0)y'''(0)] = \alpha\langle x, y\rangle.
\end{aligned}$$

$$\langle x, y\rangle = x(0)y(0) + x'(0)y'(0) + x''(0)y''(0) + x'''(0)y'''(0) = \langle y, x\rangle.$$

$$\langle x, x\rangle = x(0)^2 + x'(0)^2 + x''(0)^2 + x'''(0)^2 \geq 0.$$

$$\langle f, f\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ f \equiv 0,\ e^x - \text{Term sonst nie Null.}$$

4.1.6 Sei folgendes Skalarprodukt auf $\mathcal{P}_4$ gegeben

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx.$$

Finden Sie eine Orthonormalbasis für den Vektorraum $\operatorname{span}\{1, 3x^4\}$.

Lösung:

Gram-Schmidt: $b_1 = 1,\ b_2 = 3x^4$

$$\rightarrow e_1 = \frac{b_1}{||b_1||} = 1$$

$$\rightarrow e_2' = b_2 - \underbrace{\langle b_2, e_1\rangle}_{\int_0^1 3x^4 dx = \frac{3}{5}} e_1$$

$$e_2' = 3x^4 - \frac{3}{5}$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{||e_2'||}$$

$$||e_2'|| = \sqrt{\int_0^1 (3x^4 - \frac{3}{5})^2 dx} = \frac{4}{5}$$

$$e_2 = \frac{5}{4}(3x^4 - \frac{3}{5}) = \frac{3}{4}(5x^4 - 1)$$

Eine Orthonormalbasis ist dann gegeben durch

$$\mathcal{B} = \left\{1, \frac{3}{4}(5x^4 - 1)\right\}.$$

5 Lineare Abbildungen

Definition:

Seien V und W reelle Vektorräume. Dann heisst

$$F: V \to W, \quad x \mapsto F(x)$$

lineare Abbildung falls $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

i. $F(x+y) = F(x) + F(y)$ und ii. $F(\alpha x) = \alpha F(x)$

wenn wir nun prüfen wollen ob eine Abbildung linear ist, dann müssen wir prüfen ob i. und ii. gelten

Beispiele:

- $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x$

  i. $F(x+y) = 3(x+y) = 3x + 3y = F(x) + F(y)$

  ii. $F(\alpha x) = 3(\alpha x) = \alpha \cdot 3x = \alpha F(x)$

  linear

- $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x + 2$

  i. $F(x+y) = 3(x+y) + 2 = 3x + 3y + 2 \neq F(x) + F(y)$ nicht linear (affin linear)

Weitere Eigenschaften von linearen Abbildungen:

- 0 wird auf 0 abgebildet
- sind V und W endlichdimensional z.B. $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$, dann kann jede lineare Abbildung $F: V \to W$ durch eine $m \times n$ - Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschrieben werden

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto Ax$$

A heisst dann Abbildungsmatrix von F

Beispiel:

- $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-2y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen und Matrizen:

Wie wir gesehen haben, können wir lineare Abbildungen durch eine Matrix beschrieben $(x \mapsto Ax)$

Anhand der Abbildungsmatrix können wir viel über die Abbildung herausfinden.

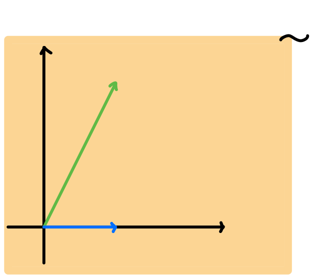
Bild:

Ganz am Anfang von LinAlg I sahen wir die Matrix-Vektor-Multiplikation

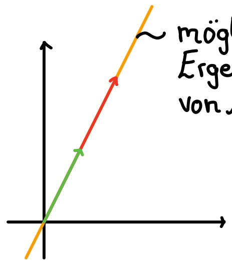
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} x_3$$

Das heisst alle möglichen Vektoren die durch das Produkt Ax entstehen können, werden durch die Linearkombination der Spalten von A beschrieben. Zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$



~ mögliche Ergebnisse von Ax



~ mögliche Ergebnisse von Ax

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_2$$

Alle diese Ergebnisse zusammen nennen sich Bild einer Matrix. Die Diemension des Bildes ist gleich dem Rang.

Mathematisch formuliert:

$$\boxed{\mathrm{Bild}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ sodass } y = Ax \}} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

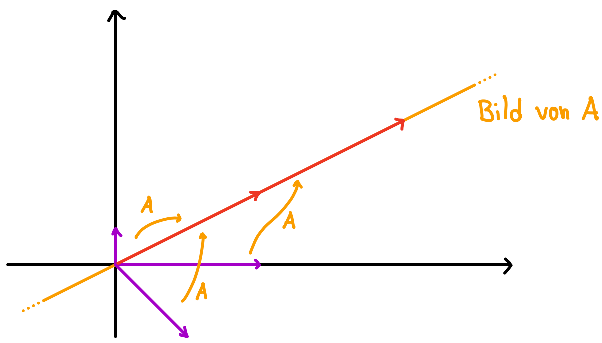
Kern:

Wie gerade gesehen, beschreibt das Bild einer Matrix den Raum auf welchen beliebige Vektoren x durch A abgebildet werden.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



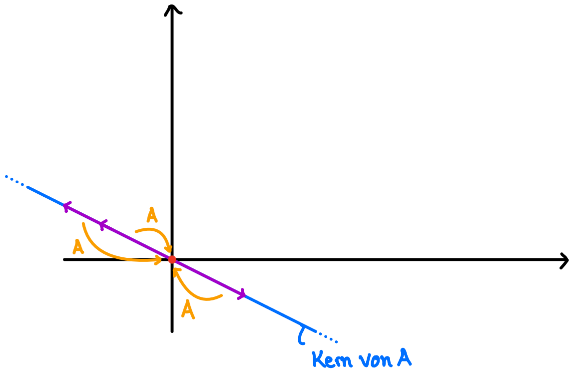
Wir fragen uns nun ob es Vektoren gibt die auf Null abgebildet werden.

D.h. wir suchen alle x, sodass $Ax=0$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

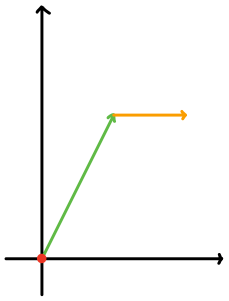


Mathematisch formuliert: $\boxed{\mathrm{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}}$

Zusammenhang mit LGS:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ Rang voll

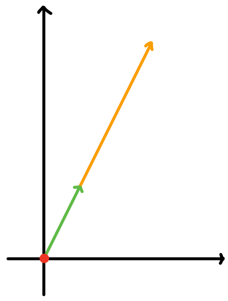
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}x_2 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ Rang nicht voll

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}x_2 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



unendlich viele Lösungen

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax=b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax=b$ ist für beliebiges b lösbar
- Das homogene LGS $Ax=0$ hat nur die triviale Lösung $(x=0)$
- A ist invertierbar / regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen / Spalten sind linear unabhängig
- Spalten von A sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$
- Das Bild von A ist n-Dimensional
- Der Kern von A besteht nur aus dem Nullvektor

Zusammenhang: $\boxed{\dim(\text{Kern}) + \dim(\text{Bild}) = n}$

Beweis:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Der Kern von A ist die Lösungsmenge des HLGS $Ax=0$. Diese Lösungsmenge hat $n-r$ freie Parameter. Dabei ist r der Rang von A (Anzahl Pivots).

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $x_3 = t$, $x_2 = -\frac{7}{5}t$, $x_1 = -\frac{6}{5}t$

$r = 2 \quad n = 3 \quad n-r = 1$

Der Lösungsraum von $Ax=0$ hat also die Dimension 1. Damit hat auch der Kern die Dimension 1.

$$\dim(\text{Kern } A) = n-r$$

Durch das Gaussverfahren zum lösen von $Ax=0$ haben wir die Zeilenstufenform R von A gefunden. Die Bilder von A und R lassen sich durch die jeweiligen Spalten beschreiben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bild}(A) = \text{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\} = \text{Bild}(R) = \text{span}\{r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}\}$$

Da A und R die selbe Lösungsmenge beschreiben, spannen sie auch den selben Raum auf. Dadurch haben sie die selbe Dimension.

Die Dimension von R ist einfach zu bestimmen da sie gleich dem Rang r ist.

$$\dim(\text{Bild}(A)) = \dim(\text{Bild}(R)) = r$$

Dadurch ist $\quad \dim(\text{Kern } A) + \dim(\text{Bild } A) = n-r + r = n$

$$\dim(\text{Kern } A) + \dim(\text{Bild } A) = n$$

Basiswechsel:

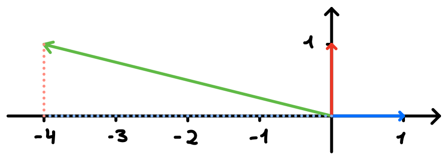
Wie wir bereits gesehen haben, können wir für den selben VR verschiedene Basen wählen. Oft kann die Wahl einer bestimmten Basis ein Problem stark vereinfachen. Um von einer Basis in die andre zu wechseln benutzten lineare Abbildungen.

Basiswechsel für Vektoren:

Koordinaten beschreiben um wie viel die Basisvektoren des asoziierten Vektorraums skaliert werden. D.h. die Koordinaten hängen immer von den Basisvektoren ab!

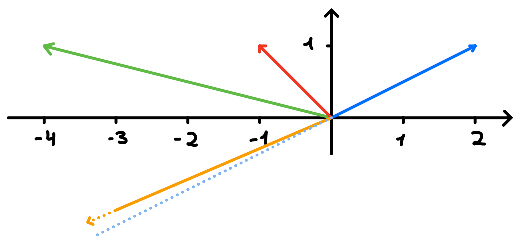
z. B. $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ in der Standartbasis:

$$-4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



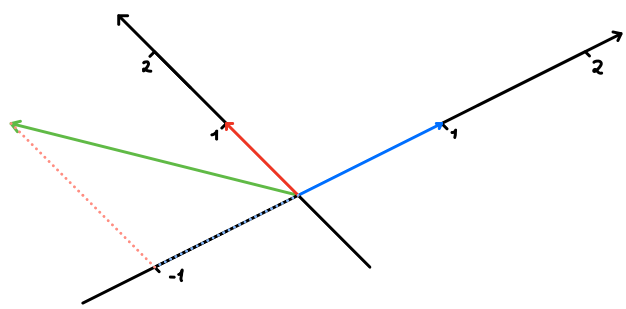
Würden wir z.B. die Basis mit Basisvektoren $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ wählen und die Koordinaten nicht ändern, würden wir einen anderen Vektor erhalten.

$$-4\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Mit den neuen Basisvektoren wären die richtigen Koordinaten für den selben Vektor

$$-1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



In der neuen Basis sind die Koordinaten also $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{\text{Standart}}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{\text{Neu}}$ beschreiben gleichen punkt

Wenn wir also von einer Basis in eine andere wechseln, müssen wir auch die Koordinaten ändern. Dafür führen wir das Konzept der Übergangsmatrix ein.

Nennen wir hierfür unsere Standartbasis $\mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ und die andere Basis $\mathcal{B}'=\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$. Wir wollen nun von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ transformieren.

Wir suchen also die Koordinaten eines Vektors aus $\mathcal{B}$ in der neuen Basis $\mathcal{B}'$.

Mathematisch ausgedrückt

$$x_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} + x_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$\Downarrow$ Form eines LGS in Matrix-Schreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}}_{T_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow T_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}'} = T^{-1}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Die Matrix $T_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ transformiert einen Vektor aus der Basis $\mathcal{B}'$ in die Basis $\mathcal{B}$. Wir wollen jedoch die Transformation von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$. Dafür nehmen wir die Inverse

Unsere Übergangsmatrix ist also $T^{-1}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}$

<u>Zusammenfassend:</u>

Für beliebige Basen $Q=\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ und $W=\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ gilt:

$$\boxed{T_{Q\to W} = \left([q_1]_W, [q_2]_W, \dots, [q_n]_W\right)}$$

$$\boxed{[v]_W = T_{Q\to W}[v]_Q}$$

$$\boxed{T_{Q\to W} = T^{-1}_{W\to Q}}$$

Basiswechsel für Darstellungsmatrizen:

Wir können nun Vektoren von einer Basis in eine andere Transformieren. Nun stellt sich die Frage ob das auch für Matrizen gilt. Denn lineare Abbildungen und deren Darstellungsmatrizen sind auch an eine Basis gebunden. Sei A eine Darstellungsmatrix einer lin. Abbildung in der Basis q. Dann gilt:

$$[A]_q [x]_q = [y]_q$$

wir suchen nun die Darstellungsmatrix der gleichen Abbildung in der Basis ω. Also:

$$[A]_\omega [x]_\omega = [y]_\omega$$

Durch umformen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
[A]_q [x]_q &= [y]_q && \Big| \cdot T_{Q \to W} \\
T_{Q \to W} [A]_q [x]_q &= T_{Q \to W} [y]_q && \Big| \; T_{Q \to W} [y]_q = [y]_\omega \\
T_{Q \to W} [A]_q [x]_q &= [y]_\omega && \Big| \; \mathbb{I} = T_{Q \to W}^{-1} T_{Q \to W} \\
T_{Q \to W} [A]_q T_{Q \to W}^{-1} T_{Q \to W} [x]_q &= [y]_\omega && \Big| \; T_{Q \to W} [x]_q = [x]_\omega \\
\underbrace{T_{Q \to W} [A]_q T_{Q \to W}^{-1}}_{[A]_\omega} [x]_\omega &= [y]_\omega
\end{aligned}$$

$$\boxed{[A]_\omega = T_{Q \to W} [A]_q T_{Q \to W}^{-1}}$$

Bei einer genauen Betrachtung fällt folgendes auf:

$$[A]_\omega [x]_\omega = [y]_\omega$$

$$T_{Q \to W} [A]_q T_{Q \to W}^{-1} [x]_\omega = [y]_\omega$$

Transformation des Eingabevektor zu Basis q.

Abbildung in Basis q

Rücktransformation zu Basis ω

5.1 Beispielaufgaben

5.1.1 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis für das Bild und den Kern von A.

Lösung:

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right. \to \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right. \begin{array}{c} -2 \quad -3 \\ + \\ + \end{array} \to \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right. \begin{array}{c} \\ -1 \\ + \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} x_4 = t \\ x_3 = s \\ x_2 = -s - 2t \\ x_1 = s \end{array} \to \begin{pmatrix} s \\ -s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix}, \ \mathrm{Kern}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da $\mathrm{Rang}(A) = 2$, nehmen wir zwei linear unabhängige Spaltenvektoren von A als Basis für das Bild:

$$\mathrm{Bild}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

5.1.2 Sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{L} :\ & \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2 \\ & p(x) \mapsto p''(x) + 4p'(x) + 3p(x) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $\mathcal{L}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Lösung:

$$\begin{aligned} 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\mathcal{L}} 3 & = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{ 1. Spalte von } A \\ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\mathcal{L}} 4 + 3x & = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{ 2. Spalte von } A \\ x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\mathcal{L}} 2 + 8x + 3x^2 & = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} & \text{ 3. Spalte von } A \end{aligned}$$

5.1.3 Geben seinen die Abbildungen

a) $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2)^\top \mapsto (2x_1 + x_2, x_1)^\top$

b) $\mathcal{G} : \mathcal{C}([x_0, x_1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ g(x) \mapsto \int_{x_0}^{x_1} g(x)\, dx$

Prüfe, ob die Abbildungen $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ linear sind.

Tipp: $\mathcal{C}([x_0, x_1], \mathbb{R})$ beschreibt alle stetigen Funktionen auf dem Intervall $[x_0, x_1]$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x+y) &= \begin{pmatrix} 2(x_1+y_1) + x_2 + y_2 \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y) \\
\mathcal{F}(\alpha x) &= \begin{pmatrix} \alpha 2x_1 + \alpha x_2 \\ \alpha x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha \mathcal{F}(x)
\end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ ist linear.

b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(g+h) &= \int_{x_0}^{x_1} g(x) + h(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} g(x)\, dx + \int_{x_0}^{x_1} h(x)\, dx \\
&= \mathcal{G}(g) + \mathcal{G}(h) \\
\mathcal{G}(\alpha g) &= \int_{x_0}^{x_1} \alpha g(x)\, dx = \alpha \int_{x_0}^{x_1} g(x)\, dx = \alpha \mathcal{G}(g)
\end{aligned}$$

$\mathcal{G}$ ist linear.

5.1.4 Gegeben Sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $\mathcal{B}$. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

definiert eine lineare Abbildung von V nach V.

a) Durch eine Wahl der neuen Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix T von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$.

b) Durch welche Matrix B wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten $\mathcal{B}'$ beschrieben?

Lösung:

a) $$T_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} \equiv S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

S^{-1} mit Gauss-Jordan bestimmen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \to T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) $$B = T[A]_{\mathcal{B}}S$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.1.5 Betrachten Sie die Abbildung $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x + 5y - 8z \\ 5x + 3y - 4z \\ -x - 3y + 8z \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ an.

b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{B}$ unter Verwendung der Übergangsmatrix T und ihrer Inversen.

c) Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \{b_1 := e_1,\ b_2 := e_1 + e_2,\ b_3 := e_2 + e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$. Finden Sie die Übergangsmatrix T von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ und ihre Inverse T^{-1}.

d) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von $\mathcal{F}$ und eine Basis des Bildes von $\mathcal{F}$. Geben Sie ausserdem die jeweiligen Dimensionen an.

Lösung:

a) $[\mathcal{F}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

b) $T_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}}$$

c) $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}[\mathcal{F}]_{\mathcal{E}}T_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 12 & -6 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{array}{ccc|c} 7 & 5 & -8 & 0 \\ 5 & 3 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 8 & 0 \end{array} \to \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & -12 & 36 & 0 \\ 0 & -16 & 48 & 0 \end{array} \to \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \begin{array}{l} x_3 = t \\ x_2 = 3t \\ x_1 = -t \end{array}$$

Da Rang$(\mathcal{F}) = 2$ ist, hat das Bild die Dimension 2. Für eine Basis des Bildes nehmen wir zwei linear unabhängige Spaltenvektoren von $\mathcal{F}$:

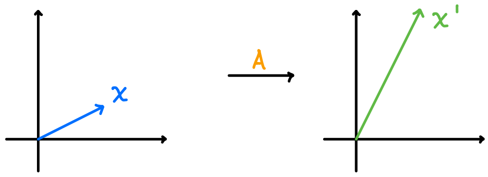
$$\text{Bild}(\mathcal{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{Kern}(\mathcal{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Dimensionen sind dann $\dim(\text{Bild}(\mathcal{F})) = 2$ und $\dim(\text{Kern}(\mathcal{F})) = 1$.

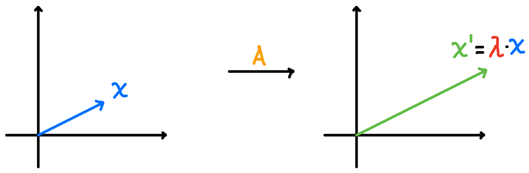
6 Eigenwertproblem

Betrachten wir zunächst eine lineare Abbildung gegeben durch $x \mapsto Ax$ $(A \in \mathbb{C}^{n \times n})$.

Die Abbildung nimmt einen Vektor x und bildet ihn auf den Vektor $x' = Ax$ ab.



Wir fragen uns nun, ob es bestimmte Eingabevektoren x gibt, welche durch die Abbildung $x \mapsto Ax$ nur um einen Faktor λ gestreckt bzw. gestaucht werden.



Wir wissen also, dass in diesem Fall für eine Abbildung, gegeben durch $x \mapsto Ax$, folgendes gelten muss:

$Ax = x' = \lambda \cdot x$. Aus dem bekommen wir dann die allgemeine Gleichung:

$$\boxed{Ax = \lambda x}$$

Der Vektor x welcher durch die Abbildung nur gestreckt bzw. gestaucht wird, nennt sich **Eigenvektor**.

Der Faktor λ, um welchen gestreckt bzw. gestaucht wird, wird **Eigenwert** genannt.

Eigenwerte:

Wir suchen also ein λ sodass $Ax = \lambda x$ gilt. Wobei $x \neq 0$. Durch umstellen erhalten wir ein HLGS der Form:

$$(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$$

Wann hat dieses HLGS nur nicht triviale Lösungen $(x \neq 0)$

3.4 Wichtige Zusammenhänge

Folgende Aussagen sind für $A^{n \times n}$ äquivalent:

- Das homogene LGS $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.
- $det(A) \neq 0$

Das HLGS hat nicht triviale Lösungen genau dann wenn $\boxed{\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0}$

Mit dieser Gleichung können wir nun λ bestimmen.

Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, bestimme alle Eigenwerte λ_i von A.

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & -6-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$\rightarrow (3-\lambda)(-6-\lambda)(3-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 3, \ \lambda_3 = -6$

Das Polynom $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda \mathbb{I})$ heisst characteristisches Polynom. Wenn $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dann ist $p_A(\lambda)$ ein Polynom n-ten Grades.

In unserem Beispiel ist der EW 3 eine doppelte Nullstelle des characteristisches Polynoms.

Wir sagen dann, dass die algebraische Vielfachheit des EW 3, gleich 2 ist. D.h.:

$\lambda_{1,2} = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 2

$\lambda_3 = -6$ mit algebraischer Vielfachheit 1

Merkmale von EW von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

i. A hat mindestens einen EW $\lambda \in \mathbb{C}$

ii. A hat höchstens n verschiedene EW $\lambda \in \mathbb{C}$

iii. A hat genau n EW $\lambda \in \mathbb{C}$, wenn man die EW mit ihrer algebraischen Vielfachheit zählt.

Weitere Definitionen zu EW:

i. Die Menge aller EW von A heisst Spektrum von A

ii. Zwei Matrizen $A, B\ \mathbb{C}^{n \times n}$ heissen ähnlich, wenn für eine reguläre Matrix $T\ \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt $B = T^{-1} A T$. A und B haben dann: das selbe characteristische Polynom

die selben EW mit den selben alg. Vf.

das selbe Spektrum

die selbe Determinante

Eigenvektoren:

Wir wissen nun wie wir EW bestimmen, nun müssen wir noch die dazugehörigen Eigenvektoren EV bestimmen. D.h. den Vektor x finden für welchen gilt:

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0).$$

Das Problem kann wieder zu $(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$ umgeschrieben werden. Nun setzen wir einen der EW ein und lösen das HLGS. Demnach sind die EV immer mit einem EW verbunden.

Bsp:

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = 3$ und $\lambda_3 = -6$. Bestimme die EV.

v_{λ_1}: $(A - \lambda_1 \mathbb{I})x = (A - 3\,\mathbb{I})x = 0$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right) x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x = 0 \quad \longrightarrow x_3 = t \in \mathbb{R} \;;\; x_2 = 0 \;;\; x_1 = 0$$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

v_{λ_3}: $(A - \lambda_3 \mathbb{I})x = (A + 6\,\mathbb{I})x = 0$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \right) x = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} x = 0 \quad \longrightarrow x_1 = 0 \;;\; x_2 = -9x_3$$

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

v_{λ_2}: $(A - \lambda_2 \mathbb{I})x = (A - 3\,\mathbb{I})x = 0$

$v_{\lambda_1} = v_{\lambda_2}$

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \quad \text{oder} \quad E_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Da wir hier ein HLGS mit $\det = 0$ lösen wird es immer unendlich viele Lösungen für $(A - \lambda \mathbb{I})x = 0$ geben. D.h. jede mögliche Linearkombination von EV von einem EW ist auch wieder ein EV. Der dadurch aufgespannte Vektorraum ist dann ein Unterraum von $\mathbb{C}^n$ und nennt sich Eigenraum.

Eigenräume werden mit E_{λ_i} bezeichnet.

<u>Bsp:</u>

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = 1$ und $\lambda_3 = 4$. Bestimme die EV.

$$E_{\lambda_1} = E_{\lambda_2} = E_1 : (A - \lambda \mathbb{I})x = (A - 1\mathbb{I})x = 0$$

$$\rightarrow \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\text{Gauss}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0 \rightarrow$$

zwei freie Parameter:

$x_3 = t$; $x_2 = s$ $\quad s,t \in \mathbb{R}$

$x_1 = -t-s$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -t-s \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| \, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

E_4 analog.

In diesem Beispiel ist also der Eigenraum E_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ beschrieben durch $E_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Die Dimension des Eigenraums $\dim(E_{\lambda_i})$ heisst geometrische Vielfachheit von λ_i.

In unserem Beispiel ist also die geometrische Vielfachheit von $\lambda_1 = 2$.

Die geom. Vf ist gleich der Anzahl der freien Parameter im HLGS $(A - \lambda\mathbb{I})x = 0$

→ Allgemein ist immer zu beachten, dass für einen EW λ von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gelten muss:

$$1 \leqslant \text{geom. Vf. von } \lambda \leqslant \text{alg. Vf. von } \lambda \leqslant n$$

Diagonalisierung:

Für Abbildungen ist es vorteihaft wenn die Abbildungsmatrix diagonal ist, da Diagonalmatrizen leicht invertierbar sind und Matrixmultiplikation einfacher ist. Beim Diagonalisieren wollen wir also einen Basiswechsel machen, so dass die Matrix in der neuen Basis diagonal ist.

Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ wollen wir also eine Matrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ finden, so dass:

$$T^{-1} A T = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$$

D ist dann die Abbildung A in einer neuen Basis.

Bei Diagonalmatrizen werden Basisvektoren nur um Skalare von der Diagonalen skaliert. D.h. die Basisvektoren sind die Eigenvektoren.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Wir wählen also die Eigenvektoren der ursprünglichen Matrix als neue Basis. Der Faktor mit welchem skaliert wird sind genau die Eigenwerte.

Die Übergangsmatrix T enthält dann als Spalten die EV von A. Die Diagonalmatrix D muss nun auf der Diagonalen die EW von A haben. D.h. $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Da wir für eine Diagonalisierung $T^{-1} A T = D$, T^{-1} brauchen muss T regulär sein. Sonst lässt sich A nicht diagonalisieren. Die allgemeine Bedingung für die Diagonalisierbarkeit lautet:

6.6 Diagonalisierbarkeit

Eine quadratische Matrix A heisst diagonalisierbar, falls eine reguläre Matrix T existiert, sodass $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

$\boxed{A \text{ halbeinfach} \iff A \text{ diagonalisierbar}}$

Was bedeutet es für eine Matrix wenn sie halbeinfach ist?

$\boxed{\text{Eine Matrix } A \text{ ist halbeinfach wenn jedes } \lambda \text{ alg Vfh.} = \text{g. Vfh.}}$

In anderen Worten: Jeder EW λ_i (mit Vfh. gezählt) hat einen EV welcher linear unabhänig von allen anderen EV ist. Deshalb gilt auch:

Eigenbasis: Die Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bilden einen Basis für $\mathbb{C}^n \iff$ die Matrix ist halbeinfach.

Recall:

> Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:
>
> – A ist invertierbar / regulär
>
> – Zeilen / Spalten sind linear unabhängig
>
> – Spalten von A sind eine Basis von $\mathbb{R}^n$

Dadurch, dass A halbeinfach ist garantieren wir dass T regulär ist und somit ist A diagonalisierbar.

Spezialfall: Symmetrische Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch dann gilt:

- A ist halbeinfach, also diagonalisierbar
- A besitzt eine orthonormale Eigenbasis
- $\exists$ eine orthogonale Matrix T so dass, $T^{-1} A T = T^T A T$ diagonal ist.

Anwendung: Potenzen von Matrizen

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisierbar. Berechne A^3

Da A diagonalisierbar ist gilt: $A = T D T^{-1}$

Nun ist $A^3 = A \cdot A \cdot A = (T D \underbrace{T^{-1})(T}_{I} D \underbrace{T^{-1})(T}_{I} D T^{-1}) = T D^3 T^{-1} = T \operatorname{diag}(\lambda_1^3, \dots, \lambda_n^3) T^{-1}$

Generell gilt $\boxed{A^k = T \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) T^{-1}}$

Dadurch vereinfacht sich auch das Matrixexponential $\boxed{e^A = T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) T^{-1}}$

Hauptachsentransformation quadratischer Formen:

Quadratische Formen:

Es gibt quadratische Funktionen in mehreren Variablen. Z.B. in zwei Variabeln.

$$q(x_1,x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

Bei genauer Betrachtung sieht man, dass diese Funktion auch mit einer Matrix beschrieben werden kann

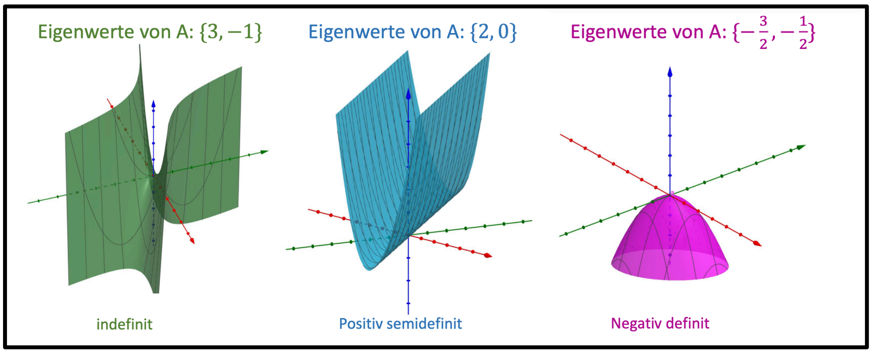
$$q(x_1,x_2) = (x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Hier ist nun $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ die quadratische Form von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Allgemein können wir für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die dazugehörige quadratische Form finden. Sie ist wie folgt definiert: $x \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\begin{aligned} q_A &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}}$$

Je nach Matrix kann die quadratische Form graphisch anders aussehen. Bsp. für 2 Variabeln.



Die unterschiedlichen quadratischen Formen lassen sich klassifizieren.

10.2 Definitheit einer quadratischen Form

Eine quadratische Form heisst:

- positiv definit: $q(x) > 0 \; \forall x \neq 0$
- negativ definit: $q(x) < 0 \; \forall x \neq 0$
- positiv semidefinit: $q(x) \geqslant 0 \; \forall x \neq 0$
- negativ semidefinit: $q(x) \leqslant 0 \; \forall x \neq 0$
- indefinit: sonst

Um die Definitheit einer quadratische Form zu bestimmen, bestimme man die Definitheit der zugehörigen symmetrischen Matrix A

10.3 Definitheit einer symmetrischen Matrix

Variante 1: Bestimmung der Eigenwerte

Die erste Möglichkeit ist, die Definitheit durch die Eigenwerte zu bestimmen. Eine symmetrische Matrix heisst:

- positiv definit: Alle $\lambda > 0$
- negativ definit: Alle $\lambda < 0$
- positiv semidefinit: Alle $\lambda \geqslant 0$
- negativ semidefinit: Alle $\lambda \leqslant 0$
- indefinit: sonst

Eine rein quadratische Form hat keine Mischterme. D.h. sie wird mit einer Diagonalmatrix gebidet:

$$q(x_1,x_2) = (x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 - x_2^2$$

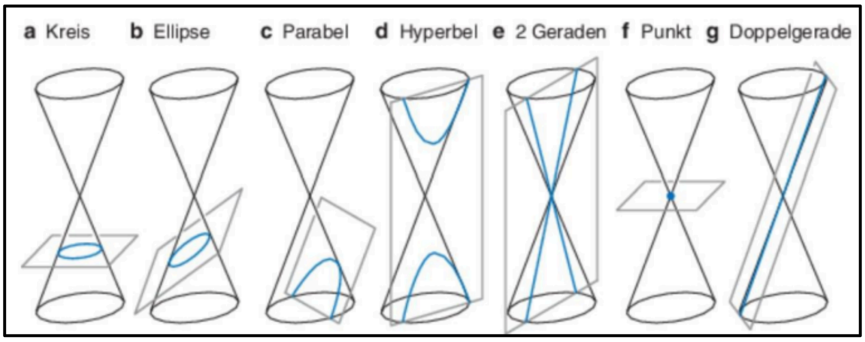
Durch eine Transformation können wir eine nicht reine Form in eine reine Form umwandeln. Dafür nehmen wir die EV der Matrix A und wählen sie als neue Basis (Diagonalisieren). Durch diese Transformation bringen wir die quadratische Form in ihre Normalform.

Kegelschnitte:

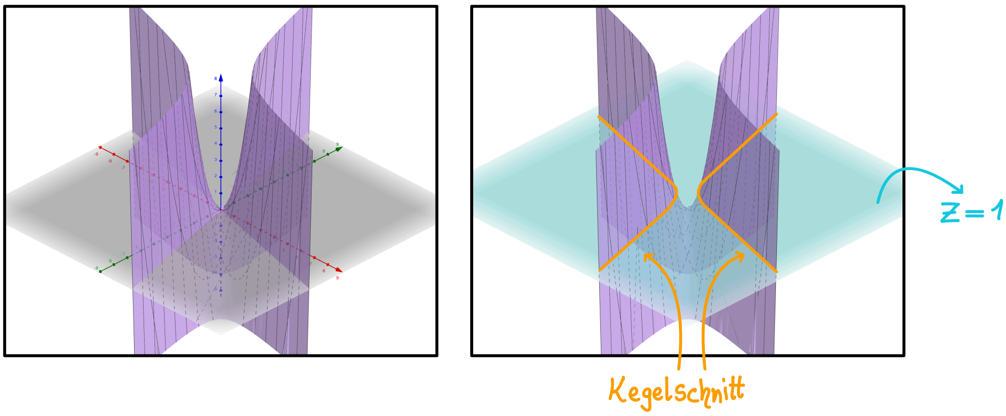
Sei eine quadratische Form q_A für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch. Dann ist die Niveaumenge

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : q_A(x) = 1\}$$

ein Kegelschnitt. Verschiedene symmetrische Matrizen liefern einen dieser Kegelschnitte.



Für die quadratische Form $q_A = (x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$:



Sei eine quadratische Form q_A für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch. Dann ist die Niveaumenge

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : q_A(x) = 1\}$$

eine Quadrik oder Fläche 2. Grades. Verschiedene quadratische Formen liefern verschiedene Quadriken

Die Normalformen aller Kegelschnitte sind:

Rang$(A) = 2$:

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$	Ellipse/Kreis
$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$	Hyperbel
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + 1 = 0$	leere Menge
$x^2 + \beta^2 y^2 = 0$	Punkt
$x^2 - \beta^2 y^2 = 0$	sich schneidendes Geradenpaar

Rang$(A) = 1$:

$x^2 - \gamma y = 0$	Parabel
$x^2 - \alpha^2 = 0$	paralleles Geradenpaar
$x^2 + \alpha^2 = 0$	leere Menge
$x^2 = 0$	Gerade

wobei α, β, γ alle $\neq 0$.

Hauptachsentransformation:

10.7 Hauptachsentransformation einer quadr. Form

Wir können durch zwei Koordinatentransformationen (Drehung $y = Tx$ und Verschiebung $z = y + c$) jede quadratische Form rein quadratisch machen.

Während der Koordinatenvektor x die quadratische Form in der Standardbasis darstellt, stellt der Koordinatenvektor z die quadratische Form in der neuen Basis dar.

Die Basis, in der $q(x)$ rein quadratisch wird, ist die Eigenbasis der zugehörigen symmetrischen Matrix A.

$$\text{Bsp: } q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2$$

Vorgehen:

Je nach Aufgabe müssen nicht alle Punkte durchgeführt werden. Für ausschliesslich Hauptachsentransformation reicht 1-3.

1. Man bestimme die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass $q(x) = x^T A x$

   Trick: $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \;\Rightarrow\; A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$s

   Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2. Man diagonalisiere die Matrix A (siehe 6.6) und bestimme die Transformationsmatrix T. Da A symmetrisch ist, kann T orthogonal gewählt werden und $T^{-1} = T^T$.

   T orthogonal wählen! Spalten von T normieren, falls zwei Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert: 8.4

   Bsp: $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Multipliziere aus: $q(y) = y^T \cdot D \cdot y$. Wir haben nun unsere Hauptachsentransformation durchgeführt.

   Bsp: $y^T D y = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$

4. Falls in Aufgabe gefragt: Bringe Quadrik $q(x) + a^T x + b = 1$ in Normalform.

   Bestimme $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$.

   Bsp: $q(x) + 2x_3 - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; b = -\frac{1}{3}$

5. Schreibe Quadrik in transformierter Form (ausmultiplizieren): $y^T D y + a^T T y + b = 1$

   Bsp: $y^T D y + a^T T y + b = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1 - \frac{1}{3} = 1$

6. Falls noch lineare Terme übrig: Ergänze quadratisch

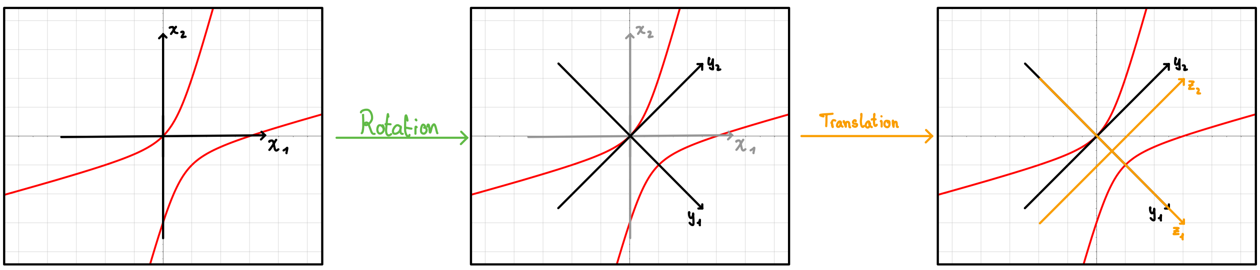
   Bsp:
   $$\begin{aligned} 0 &= -3y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1 - \tfrac{4}{3} \\ &= -3(y_1^2 - \tfrac{2}{3}y_1) - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} \\ &= -3((y_1 - \tfrac{2}{2\cdot 3})^2 - (\tfrac{2}{2\cdot 3})^2) - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} \\ &= -3(y_1 - \tfrac{2}{2\cdot 3})^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - \tfrac{4}{3} + 3 \cdot (\tfrac{1}{3})^2 \\ &= -3(y_1 - \tfrac{1}{3})^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2 - 1 \end{aligned}$$

   Durchführung der zweiten Koordinatentransformation $z = y + c$ (Verschiebung). Man bestimme Vektor c.

   Danach enthält die Gleichung nur noch rein quadratische Terme.

   Bsp: $c = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q(z) = -3z_1^2 - 2z_2^2 + 4z_3^2$

7. Falls gefragt: Gib die zusammengesetzte Koordinatentransformation an: $z = T^T x + c$



6.1 Beispielaufgaben

6.1.1 Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und geben Sie die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten an.

Lösung:

Eigenwerte durch $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$ bestimmen.

$$\rightarrow \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & -8 \\ 0 & 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -8 \\ 4 & -7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{(-3-\lambda)}_{\lambda_1=-3} [(5-\lambda)(-7-\lambda)+32] = 0$$

$$\rightarrow (5-\lambda)(-7-\lambda)+32 = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = \underbrace{(\lambda+3)}_{\lambda_2=-3} \underbrace{(\lambda-1)}_{\lambda_3=1} = 0$$

Die Eigenwerte sind also $\underbrace{\lambda_{1,2} = -3}_{\text{alg. vfh. 2}}$, und $\underbrace{\lambda_3 = 1}_{\text{alg. vfh. 1}}$.

Nun die Eigenvektoren

$\rightarrow E_{-3}$:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{l} x_3 = t \\ x_2 = s \\ x_1 = s \end{array} \qquad E_{-3} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Die geometrische Vielfachheit von $\lambda_{1,2}$ ist 2.

$\rightarrow E_1$:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{l} x_3 = t \\ x_2 = 2t \\ x_1 = 2t - t \end{array} \qquad E_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Die geometrische Vielfachheit von λ_3 ist 1.

6.1.2 Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und überprüfen Sie ob A diagonalisierbar ist.

b) Falls möglich, diagonalisieren Sie A, sodass

$$D = T^{-1}AT$$

c) Kann T orthogonal gewählt werden? Falls ja, geben Sie ein solches T an.

Lösung:

a) Aus 6.6.1 kennen wir bereits das charakteristiche Polynom

$$p_A(\lambda) = (-3-\lambda)\left[(5-\lambda)(-7-\lambda)+32\right] = -(\lambda+3)^2(\lambda-1).$$

Wir sahen auch, dass für jeden Eigenwert geom. Vfh. = alg. Vfh. gilt. Die Matrix ist also halbeinfach und deswegen Diagonalisierbar.

b) Mit den Eigenwerten und Eigenvektoren aus 6.6.1 können wir auch schnell D unf T aufschreiben.

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) T kann nicht orthogonal gewählt werden, da A nicht symmetrisch ist.

6.1.3 Sei
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie e^A.

Tipp: Das Matrixexponential vereinfacht sich für diagonalisierbare Matrizen als
$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = T diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}) T^{-1}.$$

Lösung:

Wir diagonalisieren A und berechnen dann e^A mit der Formel aus der Aufgabenstellung.

Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-4-\lambda) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$$

Eigenvektoren:

$\to E_{-1}$:

$$\left.\begin{matrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \to \quad \left.\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \to \quad \begin{matrix} x_2 = t \\ x_1 = t \end{matrix} \qquad E_{-1} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\to E_2$:

$$\left.\begin{matrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \to \quad \left.\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \to \quad \begin{matrix} x_2 = t \\ x_1 = 2t \end{matrix} \qquad E_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Das Matrixexponential ist also

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-1} + 2e^2 & 2e^{-1} - 2e^2 \\ -e^{-1} + e^2 & 2e^{-1} - e^2 \end{pmatrix}$$

6.1.4 Sei die quadratische Form q gegeben durch

$$q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$q(x) \mapsto \frac{1}{2}x_1^2 + \sqrt{3}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 \, , \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie eine symmetrische Matrix A, sodass $q(x) = x^\top Ax$.

b) Führen Sie die Hauptsachentransformation $y = Tx$ durch und geben Sie die Normalform von q an.

Lösung:

a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) Diagonalisieren:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{3}{4} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1$$

$$E_1 : \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \to E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$E_{-1} : \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \to E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Damit T orthogonal ist, müssen wir noch die Eigenvektoren normieren um dann T und D aufschreiben zu können.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nun können wir die Hauptsachentransformation $y = Tx$ durchführen.

$$x^\top Ax \xrightarrow{x = T^{-1}y} (T^{-1}y)^\top AT^{-1}y = y^\top \underbrace{TAT^{-1}}_{D} y$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1^2 - y_2^2$$

$$q(y) = y_1^2 - y_2^2$$

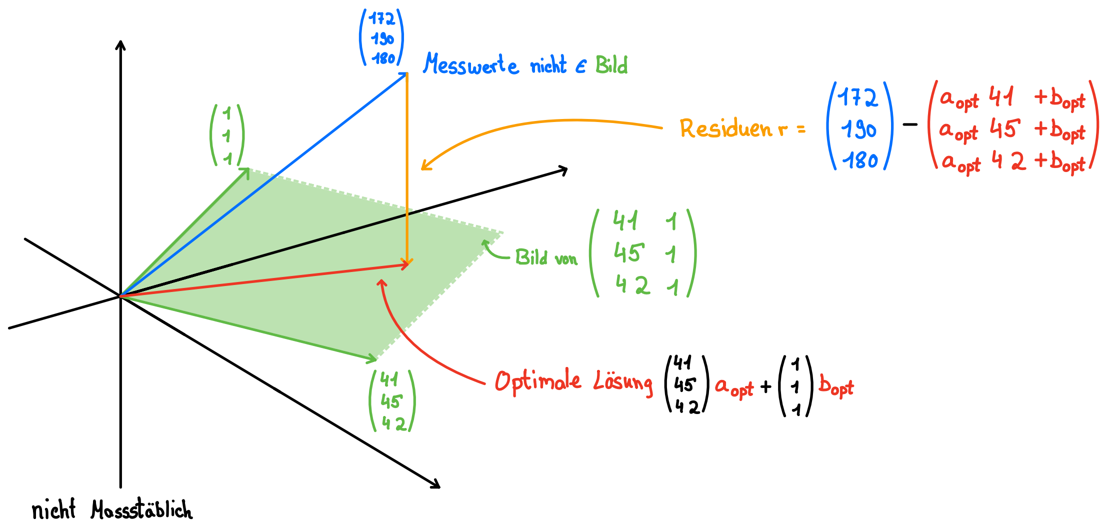
7 Methode der kleinsten Quadrate

Wie können wir eine möglichst gute Lösung für ein überbestimmtes LGS $Ax=c$ finden?

Nehmen wir als Bsp ein System mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten.

$$\begin{aligned} 172 &= a\,41 + b \\ 190 &= a\,45 + b \\ 180 &= a\,42 + b \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} 172 \\ 190 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 1 \\ 45 & 1 \\ 42 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Graphisch können wir uns das wie folgt vorstellen:



Wir wollen nun die Länge des Residuenvektors minimieren:

$$\|r\| = \sqrt{((a\,41 + b) - 172)^2 + ((a\,45 + b) - 190)^2 + ((a\,42 + b) - 180)^2}$$

Wie finde ich nun a und b, so dass $\|r\|$ minimal ist?

a_{opt} und b_{opt} finden wir durch:

$$A \cdot y \perp r \qquad (\text{Bild von } A \text{ orthogonal zu } r)$$

$$\langle A \cdot y, r \rangle = 0$$

$$(A \cdot y)^T \cdot r = 0 \qquad (\text{Skalarprodukt ausgeschrieben})$$

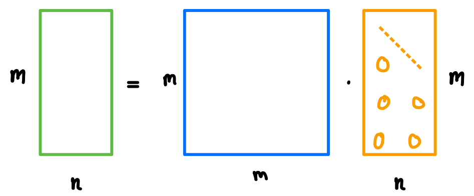
$$y^T A^T \left(A \cdot \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix} - c \right) = 0 \qquad (r \text{ eingesetzt})$$

$$y^T A^T A \cdot \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix} - y^T A^T c = 0$$

$$\boxed{A^T A \cdot \begin{pmatrix} a_{opt} \\ b_{opt} \end{pmatrix} = A^T c}$$

QR-Zerlegung:

Idee: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in das Produkt einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und einer Rechtsdreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$



Anwendung: Die QR-Zerlegung wird für ein alternatives Lösungsverfahren der kleinsten Quadrate gebraucht welches numerisch bessere Resultate liefert.

Berechnung:

11.2 QR-Zerlegung

Mit der QR-Zerlegung kann eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in das Produkt einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einer oberen Rechtsdreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ verwandelt werden:

$$\boxed{A = Q \cdot R}$$

Vorgehen:
Wir wollen nacheinander alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen von A eliminieren.

1. Man wähle zu eliminierendes Element und benenne es a_{ij}.

   Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a_{31}$ soll eliminiert werden

2. Lese i, j ab und notiere a_{jj}, a_{ij}

   Bsp: $i = 3, j = 1 \Longrightarrow a_{jj} = 1, a_{ij} = 1$

3. Berechne $w = \sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}$

   Bsp: $w = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

4. Man finde die richtige Rotationsmatrix Q'^T. Man nehme zuerst die Identitätsmatrix $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und setze $i_{ii} = \cos(\alpha)$, $i_{ij} = -\sin(\alpha)$, $i_{ji} = \sin(\alpha)$, $i_{jj} = \cos(\alpha)$.

   Bsp: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q'^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

5. Setze in Rotationsmatrix $\sin(\alpha) = \frac{a_{ij}}{w}$ und $\cos(\alpha) = \frac{a_{jj}}{w}$

   Bsp: $Q'^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

6. Berechne $Q'^T \cdot A = A'$

   Bsp: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

7. Falls A' keine obere Dreiecksmatrix, wiederhole (finde Q''^T etc.) bis alle nötigen Elemente eliminiert.

   Bsp: $Q''^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}, A'' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. Wenn $A'' = R$ gefunden, berechne $Q = (Q''^T \cdot Q'^T)^T$
   $\Longrightarrow A = Q \cdot R$

Anwendung für kleinste Quadrate:

Kleinste Quadrate mit QR-Zerlegung
Löst man ein Optimierungsproblem mit dem Computer, liefert das in 10.1 beschriebene Verfahren ungenaue Lösungen (da numerisch instabil). Das Lösungsverfahren mittels QR-Zerlegung ist besser. **In Aufgabe nur machen, wenn explizit verlangt!**

Vorgehen:

1. Man bestimme A und c wie bei 10.1.

   Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Man führe die QR-Zerlegung durch $A = QR$

   Bsp: $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Man berechne $d = Q^T \cdot c$

   Bsp: $d = Q^T \cdot c = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

4. Man berechne löse das Gleichungssystem $R_0 \cdot \boxed{x} = d_0$, wobei R_0 die extrahierte Dreiecksmatrix aus R ist und d_0 die dazugehörigen oberen Einträge von d

   optimale Lösung

   Bsp: $R_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

7.1 Beispielaufgaben

7.1.1 Sei

$$\begin{aligned} x_1 + \ 0x_2 &= \ \ 2 \\ x_1 + \ \ \ x_2 &= \ \ 1 \\ x_1 + \ 2x_2 &= \ \ 0 \\ x_1 + \ 3x_2 &= -1 \\ x_1 + \ 4x_2 &= \ \ 1 \end{aligned}$$

ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem. Lösen Sie das Ausgleichproblem mittels der Methode der kleinsten Quadrate. Das heisst, finden Sie $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)^\top$, so dass $\|r\|_2 = \|Ax - c\|_2$ minimal ist.

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$A^\top c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Löse $A^\top A \hat{x} = A^\top c$:

$$\begin{array}{cc|c} 5 & 10 & 3 \\ 10 & 30 & 2 \end{array} \begin{array}{l} \scriptstyle -2 \\ \scriptstyle + \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cc|c} 5 & 10 & 3 \\ 0 & 10 & -4 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \hat{x}_2 = -\dfrac{2}{5} \\ \hat{x}_1 = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

7.1.2 Gegeben sei

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 \quad -1 &= r_1 \\ x_2 \quad -3 &= r_2 \\ x_2 \quad -4 &= r_3 \end{aligned}$$

Lösen Sie das Ausgleichsproblem mittels der QR-Zerlegung.

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Das Element a_{32} muss eleminiert werden, wir notieren also

$$i = 3,\ i = 2,\ a_{22} = 1,\ a_{32} = 1,\ \omega = \sqrt{2}.$$

Dadurch ist

$$Q^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$Q^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$Q^\top c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \to d_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Nun lösen wir das Gleichungssystem $R_0\hat{x} = d_0$:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{7\sqrt{2}}{2} \end{array} \quad \to \hat{x} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

8 Lineare Differentialgleichungssysteme

Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Solche Gleichungen sind bereits aus der Analysis bekannt. Allgemein ist eine solche Differentialgleichung gegeben durch: $y'(t) = a\,y(t) \quad (a \in \mathbb{R}, \text{konstant})$

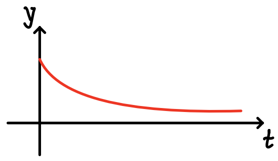
Mit der Lösung: $y(t) = c\,e^{at} \quad , c \in \mathbb{R}$

Ein konkretes Beispiel hierfür ist: $y'(t) = -2\,y(t)$

Mit der Anfangsbedingung: $y(0) = 3$

Die Lösung dieser Gleichung ist dann gegeben durch:

$$y(t) = y(0)\,e^{-2t} = 3e^{-2t}$$



Die Lösungsmenge dieser Differentialgleichung $\{y \in C^1(\mathbb{R}) : y' = ay\}$ ist ein 1-D UR von den 1-mal stetig differenzierbaren Funktionen $C^1(\mathbb{R})$.

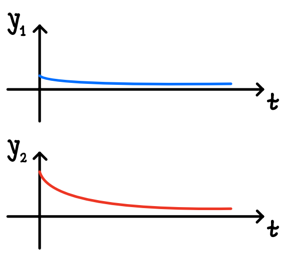
Systeme homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Genau wie wir auch schon mit den LGS sahen, können wir Gleichungen in einem System beschreiben. Das geht auch mit DGL's. Betrachten wir dafür ein Beispiel:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2\,y_1(t) & y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) = -4\,y_2(t) & y_2(0) = 3 \end{cases}$$

Dieses System ist entkoppelt da beide Gleichungen unabhänig von einander sind. Dadurch können wir sie auch separat lösen.

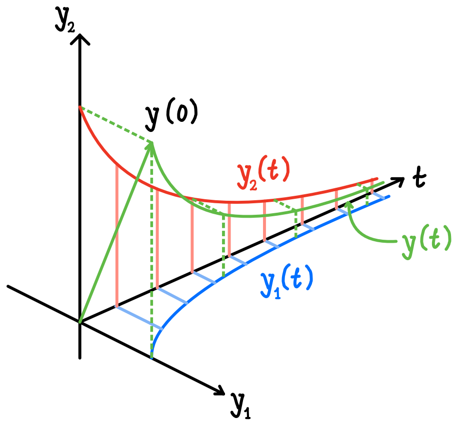
$$y_1(t) = y_1(0)\,e^{-2t} = e^{-2t}$$
$$y_2(t) = y_2(0)\,e^{-4t} = 3e^{-4t}$$



Und da wir in LinAlg sind können wir auch solche Systeme in Matrixschreibweise ausdrücken.

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow y(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Graphisch können wir uns das wie herkömmliche Linearkombinationen vorstellen, bloss das jetzt alles auch von t abhängt



Es kann aber auch sein, dass die Gleichungen abhänig von einander sind, beispielsweise:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -4\, y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) = -2\, y_1(t) - 3\, y_2(t) \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{Das Können wir nicht mehr direkt lösen.}}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wenn wir die Matrizen der zwei Beispiele vergleichen fällt folgendes auf:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

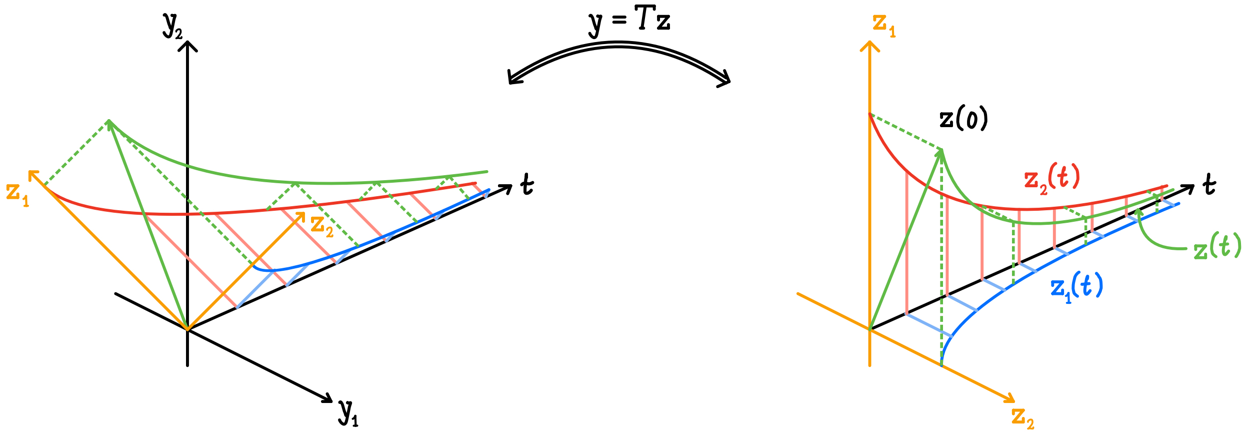
Die Matrix A_1 ist Diagonal! Wenn wir nun unsere Matrix A_2 diagonalisieren, sollten wir das System wie oben lösen können. Wir führen also einen Basiswechsel $y = Tz$ in die Eigenbasis durch mit $T = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{EV von } A_2}$

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad \xRightarrow{z = T^{-1} y} \quad \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}_{T^{-1}AT} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad z(0) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}}_{T^{-1} y(0)}$$

In der Basis z können wir das System nun lösen und danach zurück Transformieren.

$$z(t) = \frac{4}{3} e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} e^{-5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{y = Tz} y(t) = \frac{4}{3} e^{-2t} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{5}{3} e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Generell können wir jedes System homogener linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kompakt mit Matrizen darstellen.

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dots = \dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \longrightarrow Y' = AY \quad \text{mit} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Anfangsbedingung ist dann: $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^n$

und die allgemeine Lösung lautet: $Y(t) = e^{At}\,Y_0$

Wenn nun A diagonalisierbar ist, vereinfacht sich die allgemeine Lösung enorm:

$$\boxed{Y(t) = e^{At}\,Y_0 = T\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})\,T^{-1}\,Y_0}$$

Homogene lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Bis jetzt haben wir nur Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet, also Differentialgleichungen in denen maximal die 1. Ableitung vorkommt. Wie lösen wir aber Differentialgleichungen höherer Ordnung? Betrachten wir hierfür die Gleichung:

$$y'''(t) + 4y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0$$

Durch eine Substitution können wir die Differentialgleichung in ein homogenes lineares System 1. Ordnung umwandeln:

$$
\begin{aligned}
y_0 &:= y & \\
y_1 &:= y' & y_1 = y_0' \\
y_2 &:= y'' & y_2 = y_1' \\
y_3 &:= y''' & y_3 = y_2'
\end{aligned}
\quad\longrightarrow\quad
\underbrace{y_2'(t) + 4y_2(t) + 2y_1(t) - 3y_0(t) = 0}_{\text{DGL 1. Ordnung mit 3 Variabeln.}}
$$

Damit die Informationen der Substitution nicht verloren gehen, werden Sie mit Gleichungen in das System eingebunden

$$
\begin{aligned}
y_0' &= y_1 \\
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= 3y_0 - 2y_1 - 4y_2
\end{aligned}
\qquad \text{oder} \qquad
\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}
$$

Sidenote: Die Subtituition funktioniert auch bei nicht konst. Koeffizienten und inhomogenen Gleichungen.

8.1 Beispielaufgaben

8.1.1 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = Ay \ , \ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1$$

E_4 :

$$\left.\begin{matrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_2 = t \\ x_1 = \dfrac{t}{3} \end{cases} \qquad E_4 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

E_{-1} :

$$\left.\begin{matrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_2 = t \\ x_1 = -\dfrac{t}{2} \end{cases} \qquad E_{-1} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Nun fehlt noch die Anfangsbedingung

$$y(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 10 \end{matrix} \quad \rightarrow \ c_1 = -c_2 = 2$$

Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} 2e^{4t} - 2e^{-t} \\ 6e^{4t} + 4e^{-t} \end{pmatrix}$$

8.1.2 Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x''(t) = -8x(t) + 4x'(t) \tag{†}$$

a) Verwandeln Sie (†) in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Welche Dimension hat der Lösungsraum dieses Systems?

b) Geben Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung (†) an.

c) Bestimmen Sie die Lösung von (†) zu den Bedingungen $x(0) = 1, x(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Lösung:

a) Zuerst wandeln wir (†) in ein System 1. Ordnung um. Die Substitution

$$\begin{aligned} y_0 &:= x \\ y_1 &:= x' \\ y_2 &:= x'' \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= y_0' \\ y_2 &= y_1' \end{aligned}$$

führt zu dem Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = -8y_0 + 4y_1 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

b) Allgemeine **reelle** Lösung finden.

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -8 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0 \quad \to \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 2i,$$

$$E_{2+2i}: \begin{array}{cc|c} -2-2i & 1 & 0 \\ -8 & 2-2i & 0 \end{array} \;\; \begin{array}{l} \cdot \frac{-8}{2+2i} \\ + \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{cc|c} -2-2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{cases} y_0 = \dfrac{s}{2+2i} \\ y_1 = s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{für } s = 4 \quad \begin{cases} y_0 = \dfrac{4}{2+2i} \cdot \underbrace{\dfrac{2-2i}{2-2i}}_{=1} = \dfrac{4(2-2i)}{4+4} = 1-i \\ y_1 = 4 \end{cases}$$

$$E_{2+2i}: \; \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_{2-2i}: \; \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wodurch sich die folgende allgemeine Lösung des Systems ergibt

$$y(t) = e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} + e^{(2-2i)t} \begin{pmatrix} 1+i \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Diese Lösung ist jedoch komplex. Normalerweise wollen wir aber eine reelle Lösung. Um eine reelle Lösung zu erhalten, benutzten wir die Eulersche Formel $re^{i\phi} = r\cos(\phi) + i\, r\sin(\phi)$. Um die Notation folgend zu vereinfachen betrachten, wir nur einen der beiden Eigenvektoren der Lösung (wenn man beide betrachtet kommt man auf das gleiche Ergebnis nur mit mehr Notation, am Ende findest du die Alternative mit beiden).

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} = e^{2t} e^{2it} \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \left(\cos(2t) + i\sin(2t)\right) \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \left\{ \begin{pmatrix} \cos(2t) + i\sin(2t) - i\cos(2t) - \sin(2t) \\ 4\cos(2t) + 4i\sin(2t) \end{pmatrix} \right\} \\ &= e^{2t} \left\{ \begin{pmatrix} \cos(2t) + \sin(2t) \\ 4\cos(2t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin(2t) - \cos(2t) \\ 4\sin(2t) \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Für den letzten Schritt benutzten wir ein Korollar aus der Vorlesung welches besagt, dass wenn y eine komplexe Lösung eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ ist, so sind $\mathrm{Re}(y)$ und $\mathrm{Im}(y)$ ebenfalls Lösungen des Systems. $\mathrm{Re}(y)$ und $\mathrm{Im}(y)$ sind hier weiterhin linear unabhängig und bilden dadurch eine Basis des Lösungsraums von y. So lässt sich eine allgemeine Lösung auch als Linearkombination von $\mathrm{Re}(y)$ und $\mathrm{Im}(y)$ schreiben

$$y(t) = e^{2t} \left\{ a \begin{pmatrix} \cos(2t) + \sin(2t) \\ 4\cos(2t) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin(2t) - \cos(2t) \\ 4\sin(2t) \end{pmatrix} \right\}.$$

Da wir eigentlich eine Lösung für (†) suchen und durch die Substitution $x = y_0$ substituiert wurde, nehmen wir nur die erste Zeile des Vektors $y(t)$.

$$\begin{aligned} x(t) = y_0(t) &= e^{2t} \left\{ a(\cos(2t) + \sin(2t)) + b(\sin(2t) - \cos(2t)) \right\} \\ &= e^{2t} \left\{ (a-b)\cos(2t) + (a+b)\sin(2t) \right\} \\ &= e^{2t} \left\{ c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \right\}. \end{aligned}$$

c) Nun müssen wir die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $x(\frac{\pi}{4}) = 1$ in die allgemeine Lösung einsetzen.

$$\begin{aligned} x(0) &= e^{2\cdot 0} \left\{ c_1 \cos(2\cdot 0) + c_2 \sin(2\cdot 0) \right\} = 1 \to c_1 = 1 \\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) &= e^{2\cdot\frac{\pi}{4}} \left\{ c_1 \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) + c_2 \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) \right\} = 1 \to c_2 = e^{-\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Lösung des Anfangswertproblems

$$x(t) = e^{2t} \left\{ \cos(2t) + e^{-\frac{\pi}{2}} \sin(2t) \right\}.$$

Alternative Lösung mit beiden Eigenvektoren:
Anstatt nur einen der beiden Eigenvektoren zu benutzen, können wir auch beide benutzen. Das Resultat ist das gleiche, jedoch mit mehr Notationsaufwand.

$$
\begin{aligned}
y(t) &= c_3 \cdot e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} + c_4 \cdot e^{(2-2i)t} \begin{pmatrix} 1+i \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= e^{2t} \left\{ c_3 \left(\cos(2t) + i \sin(2t)\right) \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} + c_4 \left(\cos(2t) - i \sin(2t)\right) \begin{pmatrix} 1+i \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \\
&= e^{2t} \begin{pmatrix} c_3 \cos(2t) + c_3 i \sin(2t) - c_3 i \cos(2t) - c_3 \sin(2t) + c_4 \cos(2t) - c_4 i \sin(2t) + c_4 i \cos(2t) - c_4 \sin(2t) \\ 4c_3 \cos(2t) + 4c_3 i \sin(2t) + 4c_4 \cos(2t) - 4c_4 i \sin(2t) \end{pmatrix} \\
&= e^{2t} \begin{pmatrix} (c_3+c_4)\cos(2t) + (c_3-c_4) i \sin(2t) - (c_3-c_4) i \cos(2t) + (c_3+c_4)\sin(2t) \\ 4(c_3+c_4)\cos(2t) + 4(c_3-c_4) i \sin(2t) \end{pmatrix} \\
&= e^{2t} \left\{ \begin{pmatrix} (c_3+c_4)\cos(2t) + (c_3+c_4)\sin(2t) \\ 4(c_3+c_4)\cos(2t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} (c_3-c_4)\sin(2t) - (c_3-c_4)\cos(2t) \\ 4(c_3-c_4)\sin(2t) \end{pmatrix} \right\} \\
&= e^{2t} \left\{ a \begin{pmatrix} \cos(2t) + \sin(2t) \\ 4\cos(2t) \end{pmatrix} + i\ b \begin{pmatrix} \sin(2t) - \cos(2t) \\ 4\sin(2t) \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

womit wir schliesslich durch dieselbe Argumentation von oben die Lösung für (†) finden

$$
\begin{aligned}
x(t) = y_0(t) &= e^{2t} \left\{ a(\cos(2t) + \sin(2t)) + b(\sin(2t) - \cos(2t)) \right\} \\
&= e^{2t} \left\{ (a-b)\cos(2t) + (a+b)\sin(2t) \right\} \\
&= e^{2t} \left\{ c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \right\}.
\end{aligned}
$$

8.1.3 Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{aligned} y''(t) &= -2y(t) + z(t) \\ z'(t) &= -6y(t) + 3z(t) \end{aligned}$$

a) Verwandeln Sie das Differentialgleichungssystem in ein System 1. Ordnung.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung des in a) gefundenen Systems an.

Lösung:

a) Substitution

$$\begin{aligned} y' &:= x \\ y'' &:= x' \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x' &= -2y + z \\ y' &= x \\ z' &= -6y + 3z \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

b) Allgemeine Lösung finden

Eigenwerte und Eigenvektoren ergeben:

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 2$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Die Allgemeine Lösung des Systems ist also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$