Übung 02 (29.09.23)

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Definition:

Gleichungssysteme sind eine Menge von Gleichungen mit Unbekannten Variablen.

Wann ist ein Gleichungssystem **linear**?

→ Wenn die Unbekannten nur in der ersten Potenz vorkommen.

Meistens werden die Variablen mit reellen Skalaren multipliziert.

Bsp: linear:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 + 8x_2 &= 5 \end{aligned}$$

nicht linear:

$$\begin{aligned} e^{x_1} + x_2^3 &= 6 \\ \frac{1}{x_1} + \cos(x_2) &= 2 \end{aligned}$$

Notation:

erweiterte Matrix:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 4 \\ 6x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 2 \\ 9x_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 3 & 4 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 2 & 8 \end{array}$$

als Produkt: $Ax = b$

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad m \times n \text{ Matrix}$$

m Gleichungen
n Unbekannte

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{Spaltenvektoren}$$

$\Rightarrow$ das Produkt Ax wird definiert mit:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \dots a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Lösungsverfahren:

Ein LGS hat entweder:

→ eine eindeutige Lösung

→ unendlich viele Lösungen

→ keine Lösung

Um Lösung zu finden benutzen wir den Gausschen Algorithmus.
Dadurch bringen wir das LGS in eine Form in der es einfach zu lösen ist. Diese Form heisst Zeilenstufenform.

für $m=n$

x_1	x_2	x_3	
3	4	7	4
0	2	0	2
0	0	2	8

x_1	x_2	x_3	x_4	
2	8	3	6	3
0	0	4	0	4
0	0	0	5	2

für $m \neq n$

In dieser Form lässt sich das LGS durch Rückwartseinsetzen lösen.
Um auf die Zeilenstufenform zu gelangen benutzen wir den Gausschen Algorithmus. Dieser besteht aus elementaren Zeilenumformungen.

I.) vertauschen von zwei Zeilen

II.) addieren eines vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

Die Lösungsmenge bleibt durch diese Operationen gleich.

Bsp: Bringe das LGS in Zeilenstufenform

$$
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 1 \\
1 & 2 & 4 & 2 \\
2 & 3 & 1 & 0
\end{array}
\;\oplus(-1)
\;\longrightarrow\;
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 3 & 1 & 0
\end{array}
\;\oplus(-2)
\;\longrightarrow\;
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & -5 & -2
\end{array}
\;\oplus(-1)
\;\longrightarrow
$$

$$
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -6 & -3
\end{array}
$$

→ Rückwartseinsetzen

Hat mein LGS nun eine, keine oder unendlich viele Lösungen?

Betrachten wir nochmals einige LGS in Zeilenstufenform.

$$
\text{rang}=3\left\{
\overbrace{\begin{array}{ccc}
x_1 & x_2 & x_3 \\
\hline
1 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -6
\end{array}}^{n=3}
\begin{array}{|c}
\\
\hline
1 \\
1 \\
-3
\end{array}\right.
\qquad
\text{rang}=2\left\{
\overbrace{\begin{array}{ccc}
x_1 & x_2 & x_3 \\
\hline
1 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0
\end{array}}^{n=3}
\begin{array}{|c}
\\
\hline
1 \\
1 \\
0
\end{array}\right.
\qquad
\text{rang}=2\left\{
\overbrace{\begin{array}{ccc}
x_1 & x_2 & x_3 \\
\hline
1 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0
\end{array}}^{n=3}
\begin{array}{|c}
\\
\hline
1 \\
1 \\
1
\end{array}\right.
$$

wenn Rang gleich anzahl Unbekannte

<u>eine Lösung</u>

wenn Rang kleiner als Anzahl Unbekannte und letze Zeile immer gültig.

<u>unendlich viele Lösungen</u>

wenn Rang kleiner als Anzahl Unbekannte und Letze Zeile nie gültig (Verträglichkeitsbedingung)

<u>keine Lösung</u>

Beispielaufgaben

1.) Das LGS ist bereits in Zeilenstufenform. Wie viele Lösungen hat es ?

a.)

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1	3	1	1
0	2	4	3	2
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1	3	1	1
0	2	4	3	2
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

unendlich viele, da sich Nullzeilen nicht wiedersprechen.

b.)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1	3	1	2	1
0	2	4	3	4	2
0	0	0	2	7	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1	3	1	2	1
0	2	4	3	4	2
0	0	0	2	7	0
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0

Keine da sich Nullzeile widerspricht

c.)

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1	3	1	1
0	2	4	3	2
0	0	2	0	0
0	0	0	0	0

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1	3	1	1
0	2	4	3	2
0	0	2	0	0
0	0	0	0	0

unendlich viele, da sich Nullzeilen nicht wiedersprechen.

d.)

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1	3	1	1
0	2	4	3	2
0	0	2	0	0
0	0	0	5	2

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	1	3	1	1
0	2	4	3	2
0	0	2	0	0
0	0	0	5	2

eindeutige Lösung, da keine Nullzeile (rang=n)

2.) Bringe das LGS in Zeilenstufenform und Löse durch Rückwärtseinsetzen.

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 9 \\ -x \quad + z &= -1 \\ x + y + 2z &= 7 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & 1 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & 1 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \end{array} \oplus \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \end{array} \oplus (-2) \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array} \oplus$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad z = 1$$

$$y + 3z = 6 \quad \Leftrightarrow \quad y + 3 = 6 \quad \Rightarrow \quad y = 3$$

$$x + y + 2z = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 + 2 = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

3.) Finde die Lösung des LGS durch Rückwärtseinsetzen

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Zeilenstufenform ?

verwende Parameter t

$$x_3 = t$$

$$2x_2 + 4t = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 1 - 2t \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1-3t \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x_1 + 3t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1 - 3t$$

Tipps zur Serie

1.) • welche Antworten kann man direkt ausschliessen?
• einsetzen

2.) • erst für allgemeinen Fall lösen, dann Werte einsetzen
oder
• alle Lösungsvektoren gleichzeitig Gaussen.

3.) • was sind Pivot-Variablen und was freie Parameter?