Lineare Algebra I nbartzsch

Übung 03 (06.10.23)

Recap

Durch das Gaussen wird das LGS in Zeilenstufenform gebracht:

$$
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 1 \\
1 & 2 & 4 & 2 \\
2 & 3 & 1 & 0
\end{array}
\;\oplus(-1)\;\longrightarrow\;
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 3 & 1 & 0
\end{array}
\;\oplus(-2)\;\longrightarrow\;
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & -5 & -2
\end{array}
\;\oplus(-1)\;\longrightarrow
$$

$$
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -6 & -3
\end{array}
$$

die Anzahl Lösung lässt sich jetz einfach bestimmen:

$$
\text{rang}=3\left\{
\begin{array}{ccc|c}
\multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{n=3}} & \\
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -6 & -3
\end{array}\right.
\qquad
\text{rang}=2\left\{
\begin{array}{ccc|c}
\multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{n=3}} & \\
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.
\qquad
\text{rang}=2\left\{
\begin{array}{ccc|c}
\multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{n=3}} & \\
x_1 & x_2 & x_3 & \\
\hline
1 & 1 & 3 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right.
$$

wenn Rang gleich anzahl Unbekannte

<u>eine Lösung</u>

wenn Rang kleiner als Anzahl Unbekannte und letze Zeile immer gültig.

<u>unendlich viele Lösungen</u>

wenn Rang kleiner als Anzahl Unbekannte und Letze Zeile nie gültig (Verträglichkeitsbedingung)

<u>keine Lösung</u>

⇒ Bemerkung Bonusaufgabe...

1.) Im richtigen Bereich auf SAM-UP Tool einreichen

2.) Aufgabenstellung lesen! Wenn begründung <u>ohne</u> Rechnung steht dann nicht rechnen!

3.) Verständlich machen was ihr denkt.

Geometrische Interpretation

von LGS

⇒ **Zeileninterpretation:**

Betrachten wir die einzelnden Zeilen eines 2x2 LGS, so können wir 2 Geraden im 2-D Raum definieren.

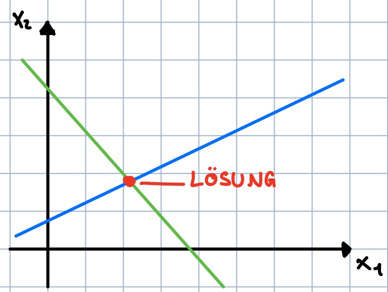
Bsp:

➡

x_1	x_2	
1	2	5
5	1	7

⇒ $1x_1 + 2x_2 = 5 \Leftrightarrow x_2 = \frac{5}{2} - \frac{x_1}{2}$

$5x_1 + x_2 = 7 \Leftrightarrow x_2 = 7 - 5x_1$



Beide Gleichungen liefern eine Gerade im 2-D Raum. Deren Schnittmenge ist dann die Lösung unseres LGS. Die Geraden schneiden sich in einem Punkt. Das LGS hat demnach eine eindeutige Lösung

➡

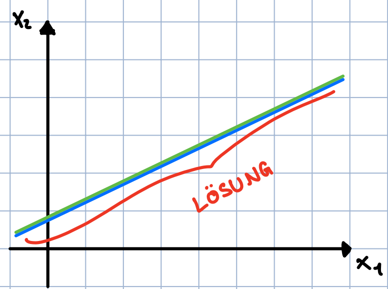
x_1	x_2	
1	2	5
2	4	10

⇒ $x_1 + 2x_2 = 5 \Leftrightarrow x_2 = \frac{5}{2} - \frac{x_1}{2}$

$2x_1 + 4x_2 = 10 \Leftrightarrow x_2 = \frac{10}{4} - \frac{2x_1}{4} \Leftrightarrow x_2 = \frac{5}{2} - \frac{x_1}{2}$

→ Gleichungen sind identisch

Wir erhalten unendlich viele Lösungen da Schnittmenge unendlich gross ist. Die Geraden sind identisch.



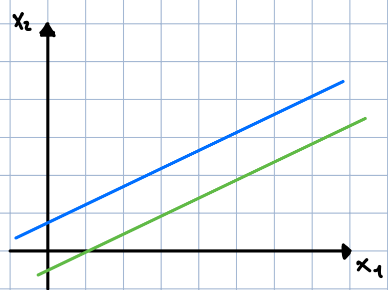
➡

x_1	x_2	
1	2	5
1	2	3

⇒ $x_1 + 2x_2 = 5 \Leftrightarrow x_2 = \frac{5}{2} - \frac{x_1}{2}$

$x_1 + 2x_2 = 3 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3}{2} - \frac{x_1}{2}$

Wir erhalten keine Lösung da die Schnittmenge leer ist. Die Geraden sind Parallel, werden sich also nie schneiden.



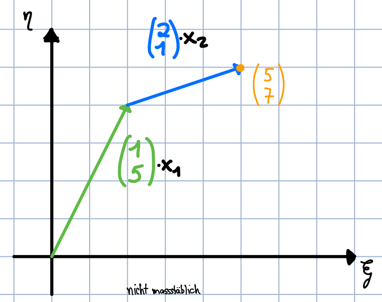
⇒ In 3-D analog mit Ebenen

⇒ Spalteninterpretation:

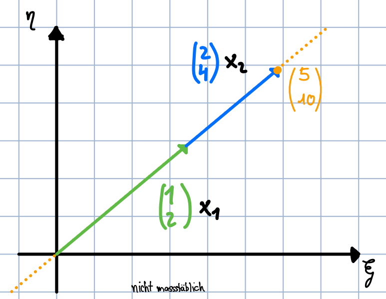
Betrachten wir nun die Spalten unseres LGS.
Die daraus resultierenden Vektoren können auch geometrisch interpretiert werden.

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 5x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$$

➡ Durch Skalierung und addition der Vektoren können wir zu jeder Lösung gelangen. Falls das LGS vollen Rang hat, können immer eindeutige Lösungen gefunden werden (für jedes b). $(r = m)$ (Korollar 1.4.)

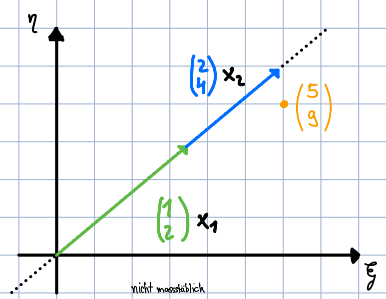


➡ $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 10 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$$



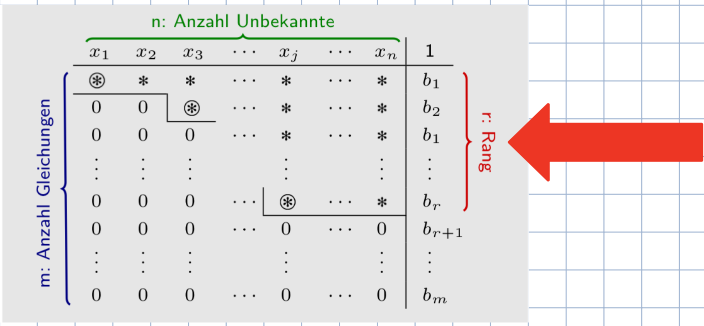
Nun ist der Rang des LGS nicht voll $(r < m)$. Unendlich viele Kombinationen von x_1 & x_2 führen zur Lösung.
Die Vektoren können jedoch nur Lösungen "auf der Linie" erfüllen. (Korollar 1.5.)

➡ $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 9 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix}$$

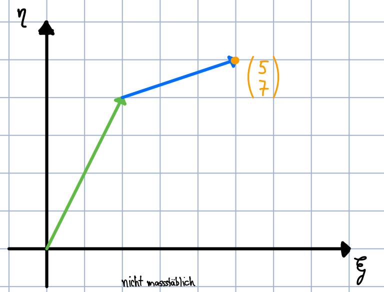


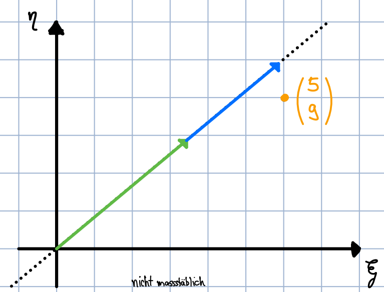
Der Rang des LGS ist nicht voll und die Verträglichkeitsbedingung ist nicht erfüllt. Die Lösung liegt nicht auf der von den Vektoren aufgespannten Gerade. Das LGS hat keine Lösung.

⇒ Wenn der Rang voll ist $(r = m)$ gibt es für jedes b $(A \cdot x = b)$ eine eindeutige Lösung. Wenn der Rang nicht voll ist $(r < m)$ und Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist gibt es unendlich viele Lösungen.



Der Rang r unseres LGS ist gleich der Dimension der Lösungsmenge. Ist der Rang also voll so gibt es für jedes beliebiges b eine Lösung





x_1	x_2	
1	2	5
5	1	7

→

x_1	x_2	
1	2	5
0	1	2

voller Rang

= Lösungsmenge ist 2-Dimensional

x_1	x_2	
1	2	5
2	4	9

→

x_1	x_2	
1	2	5
0	0	1

Rang = 1

= Lösungsmene ist 1-Dimensional

Beispielaufgaben

Löse das folgende LGS:

=> in Zeilenstufenform bringen:

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	3	2	1
0	2	1	3	2
0	4	2	6	4
0	0	0	0	0

(-2) =>

x_1	x_2	x_3	x_4	1
1	0	3	2	1
0	2	1	3	2
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$\Rightarrow$ $r=2$ $\quad n=4$ $\quad n-r=2$ freie Parameter

$x_3 = s \quad x_4 = t \quad s,t \in \mathbb{R}$

$x_1 + 3s + 2t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1 - 3s - 2t$

$2x_2 + s + 3t = 2 \qquad\quad x_2 = 1 - \frac{s}{2} - \frac{3}{2}t$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

Tipps zur Serie

1.) Gegenbeispiele

2.) Erst allgemein umstellen (d.h. keine Parameter einsetzen). Dann für Werte von a & b ausprobieren.

4.) Beide b gleichzeitig Gaussen

3.) Ansatz schwerig. (Ansatz nicht direkt Prüfungsrelevant)
Exponenten sind Unbekannten

Analoges Beispiel: $m: kg^1$, $V: m^3$, $\rho = kg^1 m^{-3}$ $\Big\}$ $m^\alpha \cdot V^\beta \rho^\gamma = K$, K ist dimensionslos

$\hookrightarrow K: kg^0 m^0$

mit Dimensionen geschrieben:

$$\Rightarrow m^\alpha[kg^1 m^0]^\alpha \cdot V^\beta[m^3]^\beta \cdot \rho^\gamma[kg^1 m^{-3}]^\gamma = K[kg^0 m^0]$$

betrachten wir jetzt nur die Dimensionen:

$$\Rightarrow kg^\alpha m^{3\beta} kg^\gamma m^{-3\gamma} = 1 \Rightarrow kg^{\alpha+\gamma} m^{3\beta-3\gamma} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma = 0 \\ 3\beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$ LGS!!!

· Reminder Potenzgesetze:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^0 = 1$$