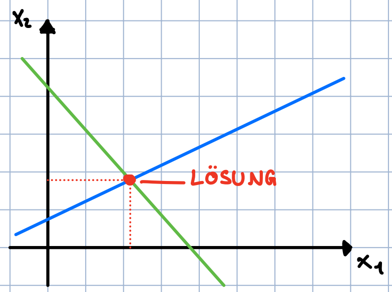
Übung 04 (13.10.23)

Recap

→ Hinweise zur Korrektur.

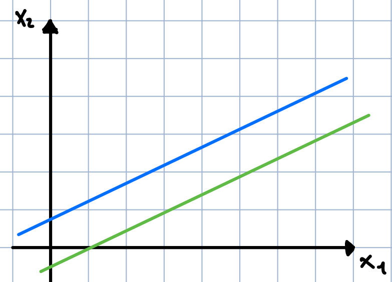
Geometrische Interpretationen:

• Zeileninterpretation:



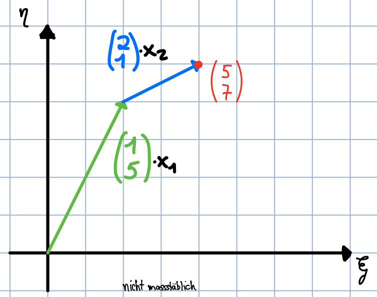
→ Geraden haben einen eindeutigen Schittpunkt. Das LGS hat eine eindeutige Lösung

→ Geraden sind identisch, die Schnittmenge ist unendlich gross. Das LGS hat unendlich viele Lösungen



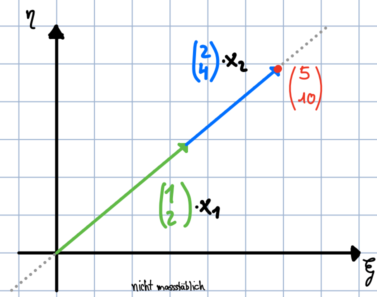
→ Geraden sind parallel und berühren sich nie. Die Schnittmenge ist leer. Das LGS hat keine Lösung

• Spalteninterpretation:



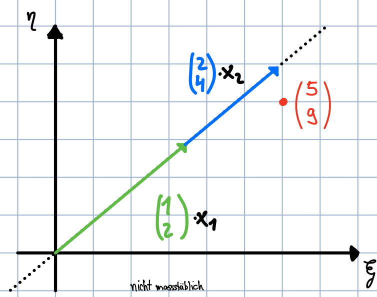
→ Der Rang voll. Für jedes b kann eine eindeutige Lösung gefunden werden.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 5\\ 5 & 1 & 7\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\end{array}\right)$$



→ Der Rang ist nicht voll und die Verträglichkeitsbedingung ist efüllt, es gibt unendlich viele Lösungen

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 10\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$



→ Der Rang ist nicht voll und die Verträglichkeitsbedingung ist nicht efüllt, es gibt keine Lösung

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 9\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Die Logik kann auch auf das LGS in Zeilenstufenform angewendet werden.

Der Rang ist gleich der Dimension des Lösungsraums

Matrizen

Wir können uns Matrizen veralgemeinernd als "Zahlenfelder" vorstellen.

Eine $m \times n$ Matrix A hat die Form:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \Big\} m \text{ Zeilen} \longrightarrow \boxed{A \in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

(Zeilen zuerst, Spalten später)

$a_{ij} = (A)_{ij}$ ist der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

Matrizen mit nur einer Spalte oder Zeile sind Spalten- bzw. Zeilenvektoren

Wichtige Matrizen:

→ Quadratisch $:=$ $m = n$

→ Nullmatrix $:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alle Einträge sind null

→ Obere Dreiecksmatrix
Rechtsdreiecksmatrix $:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $m = n$ und $(A)_{ij} = 0$ für $i > j$

→ Untere Dreiecksmatrix
Linksdreiecksmatrix $:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $m = n$ und $(A)_{ij} = 0$ für $i < j$

→ Diagonalmatrix $:= \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(d_{11}, d_{22}, d_{33})$ (Skaliert)

→ Einheitsmatrix
Identität $:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$ (wie „1")

Transponieren:

Die Transponierte von A ist A^T

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Transponieren ist wie Spiegeln an einer Diagonalen

Ein transponierter Zeilenvektor wird zu einen Spalenvektor und umgekehrt.

→ Symmetrische Matrizen := $A = A^T$, $m = n$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

→ Antisymmetrische Matrizen := $A^T = -A$, $m = n$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ was muss auf der Diagonalen stehen?

Rechnen mit Matrizen: $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

Addition: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

→ Einträge werden einzelnd addiert

Subtraktion: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

→ Einträge werden einzelnd subtrahiert

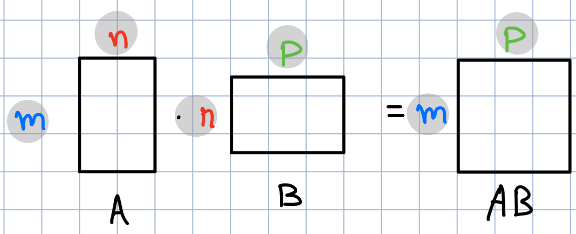
Multiplikation:

- mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$: $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

- mit einer anderen Matrix :

  seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

  nicht alle Matrizen können zusammen multipliziert werden. Bedingun ist:



$$m \times \underbrace{n \cdot n}_{=} \times p = m \times p$$

wenn Bedingung erfüllt ist das Produkt definiert durch:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} (B)_{kj}$$

Formel sieht komplizierter aus als es eigentlich ist. (Skalarprodukt von Zeilen und Spalten)

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{2 \times 3 \quad 3 \times 2}_{3\,=\,3} = 2 \times 2 \quad \rightarrow \text{Bedingung erfüllt}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

Berechnen wir nun das Ergebnis a_{12}. Dafür brauchen wir:

1. Zeile der erstem Matrix und 2. Spalte der zweiten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$$a_{12} = (1 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & 2 \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

Analog für a_{11}, a_{21}, a_{22}

$$a_{11} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ , \quad a_{21} = (0 \ 2 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \ , \quad a_{22} = (0 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$$

-> Zusammenfassend: Spalten auf Zeilen legen.

Rechenregeln:

Schaut auf der Zusammenfassung!

$$A+B=B+A$$

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A+B)C = AC+BC$$

$$A(C+D) = AC+AD$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Beispiel: An der Tafel.

Berechne folgende Produkte:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2&1\\2&0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1\\14&3\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}2&1\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&8\\2&4\end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

$$\begin{pmatrix}6&1\\14&3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}5&8\\2&4\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ACHTUNG: } AB \neq BA}$ im allgemeinen Fall

Beispielaufgaben

1.) Berechne das Produkt $A \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Bedingung prüfen

$A \in \mathbb{R}^{4\times3}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times3}$ multiplikation nicht möglich da Dimensionen nicht stimmen.

2.) Berechne das Produkt $A \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Bedingung prüfen

$A \in \mathbb{R}^{4\times3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ ist erfüllt und $A \cdot B \in \mathbb{R}^{4\times3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1 + 2\cdot2 + 0\cdot1 & 1\cdot4 + 2\cdot1 + 0\cdot2 & 1\cdot1 + 2\cdot1 + 0\cdot1 \\ 0\cdot1 + 2\cdot2 + 3\cdot1 & 0\cdot4 + 2\cdot1 + 3\cdot2 & 0\cdot1 + 2\cdot1 + 3\cdot1 \\ 1\cdot1 + 0\cdot2 + 2\cdot1 & 1\cdot4 + 0\cdot1 + 2\cdot2 & 1\cdot1 + 0\cdot1 + 2\cdot1 \\ 1\cdot5 + 2\cdot2 + 3\cdot1 & 5\cdot4 + 2\cdot1 + 3\cdot2 & 5\cdot1 + 2\cdot1 + 3\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \\ 3 & 8 & 3 \\ 12 & 28 & 10 \end{pmatrix}$$

Tipps zur Serie

1.) Wichtige Aufgabe. Rang bestimmen und Bedingungen prüfen.

2.) Wichtige Aufgabe. Für welches t ist das LGS lösbar? Was bedeutet das Schneiden von Ebenen für das LGS.

3.) <u>Knobelaufgabe</u>! Versuche ein LGS aufzustellen.

4.) Keine Tipps, Aufgabe ist da um Problemafik vom numerischen Lösem darzustellen.