Übung 05 (20.10.23)

- Feedback geben! (Link per Mail erhalten)
- Anmerkungen zu Serie 02:

2. Geben Sie für a und b Bedingungen an, so dass das System

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 2bx_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & & & 4x_3 & = & 5 \\ & & 2bx_2 & + & 3ax_3 & = & b \end{array}$$

(a) Lösungen mit *zwei* freien Parametern besitzt,

(b) Lösungen mit *einem* freien Parameter besitzt,

(c) eindeutig lösbar ist,

(d) keine Lösung hat

und geben Sie in jedem Fall die Lösungsmenge an.

- Aufgabenstellung lesen
- Zeigt eure Arbeit (Rechenweg, Begründungen etc. . Sonst keine Teilpunkte
- Bei Nr. 2 aufpassen was freie Parameter der Lösungsschar und Parameter der Aufgabenstellung.
- Bei Fallunterscheidung so generell wie möglich sein. ($a \neq 0$ anstatt $a = 1$)

Recap

Transponieren:

Die Transponierte von A ist A^T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Transponieren ist wie Spiegeln an einer Diagonalen

Ein transponierter Zeilenvektor wird zu einen Spaltenvektor und umgekehrt.

Rechenregeln für das Transponieren auf Zusammenfassung.

Rechnen mit Matrizen: $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

Addition: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

→ Einträge werden einzelnd addiert

Subtraktion: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

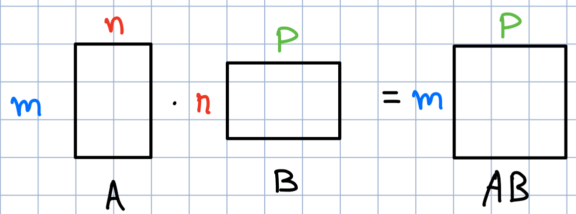
→ Einträge werden einzelnd subtrahiert

Multiplikation:

- mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$: $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

- mit einer anderen Matrix :

seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$
nicht alle Matrizen können zusammen multipliziert werden. Bedingun ist:



$$m \times \underbrace{n \cdot n}_{=} \times p = m \times p$$

wenn Bedingung erfüllt ist das Produkt definiert durch:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \, (B)_{kj}$$

im allgemeinen Fall

$\boxed{\text{ACHTUNG: } AB \neq BA}$

Matrizen continued

→ Einheitsmatrix
Identität $:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n$

Analog zu „1". Es gilt für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\mathbb{I}_m A = A \, \mathbb{I}_n = A \qquad \ulcorner \text{wenn } A \in \mathbb{R} : 1 \cdot A = A \lrcorner$$

Identität kann mithilfe des Kronecker-Delta beschrieben werden:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \text{dann ist } (\mathbb{I})_{ij} = \delta_{ij}$$

Notationen für Matrizen:

Spaltenstruktur:

$a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}$ m-Spaltenvektoren ($m \times 1$ Matrizen) $\rightarrow a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

dann lässt sich A bezeichnen durch:

$$A = (a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$$

Zeilenstruktur:

$a^{[1]}, a^{[2]}, \dots, a^{[m]}$ n-Zeilenvektoren ($1 \times n$ Matrizen) $\rightarrow a^{[1]} = (1 \ \ 2 \ \ 3)$

dann lässt sich A bezeichnen durch:

$$A = \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ \vdots \\ a^{[m]} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \ \dots \ a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \ \dots \ a_{2n}} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \boxed{a_{m1} \quad a_{m2} \ \dots \ a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{matrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ \\ a^{[m]} \end{matrix} \qquad A = \begin{array}{cccc} a^{(1)} & a^{(2)} & & a^{(n)} \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrix Multiplikation revisited: (Spaltenstruktursatz)

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $x^{3\times 1}$ dann ist Ax ein 3×1 Spaltenvektor.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun einige Spezialfälle:

Sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ erste Spalte von A

Wenn nun $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

→ zweite Spalte von A

sei $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

→ zwei mal zweite Spalte

sei $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dann ist das Produkt Ax definiert durch:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Generell gilt für Ax: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

$$Ax = \underbrace{x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots x_n a^{(n)}}_{\text{Linearkombination}}$$

$a^{(j)}$ = j-te Spalte von A

Die Matrizen verhalten sich also ähnlich wie Funktionen. Wenn man einen Vektor mit einer Matrix multipliziert kommt wieder ein Vektor raus. Analog zu einer Funktion z.B. $f(x)$.

In der Linearen Algebra nennen wir dies Transformation oder Abbildung.

→ Matrix-Arcade Beispiel

Was wenn x eine Matrix ist? Seien also $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir können dieses Produkt wie zwei Multiplikationen von Matrix mit Vektor sehen

$$AB = \left(Ab^{(1)} \quad Ab^{(2)} \quad \dots \quad Ab^{(p)} \right)$$

Dadurch kann man Matrix Multiplikationen in bestimmten Fällen einfach ablesen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

zwei mal erste Spalte

zweite Spalte
+ dritte Spalte

Wenn wir wieder an Matrizen als Transformationen denken, so ist das Multiplizieren von Matrizen wie ein konsekutives Ausführen von Transformationen.

Matrix Arcade

$$ABx = Ax' = x''$$

← Reihenfolge der Multiplikation

1.) Zuerst transformiert B den Eingabevektor x. Das generiert den transformierten Vektor x'

2.) Danach transformiert A den bereits transformierten Vektor x' zu x''

Wir können nun Matrizen addieren, subtrahieren und multiplizieren.

Können wir auch "dividieren"?

In den reellen Zahlen können wir Division als eine Multiplikation schreiben: $\frac{x}{a} = xa^{-1}$

Inverse Matrizen:

Die nxn Inverse von einer nxn Matrix A wird mit A^{-1} bezeichnet. Es gilt:

$$AA^{-1} = \mathbb{I}_n$$

Wenn A eine Inverse besitzt, so nennt man A regulär oder invertierbar.

Bildlich macht A^{-1} die Transformation von A Ruckgänig.

Matrix Arcade

Rechenregeln:

$$I^{-1} = I \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad rang(A^{-1}) = rang(A)$$

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

$$(c \cdot A)^{-1} = c^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Tipps zur Serie

1.) Wichtig! Zusammenfassung brauchen.

2.) Wichtig! Matrixmultiplikation üben. Mühsam aber wichtig.

3.) · LGS aufstellen ist schwer nicht direkt Teil der VL

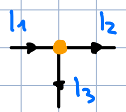
· Überlegt was passiert wenn i variiert (Aufgabenteil a)

· Π ist wie Σ aber für Multiplikation

4.) · LGS aufstellen ist schwer nicht direkt Teil der VL.

· Ihr benötigt die Kirchhoffschen Regeln (Physik / Elektrotechnik)

Summe aller Teilströme in jedem Knoten ist null

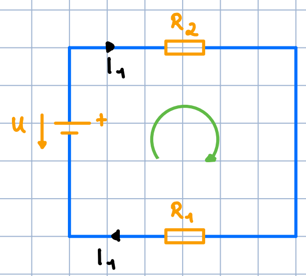


$I_1 = I_2 + I_3$

Summe der Teilspannungen in jeder Masche ist null. Spannungen entstehen entweder über Spannungsquellen oder über Widerstände R (—▭—).

Die Spannung über einen Widerstand ist $U = RI$ und ist in Richtung des Stromes.

Umlaufrichtung definiert positives Vorzeichen.



$\rightarrow U = I_1 R_2 + I_1 R_1$