Übung 06 (27.10.23)

- Feedback geben! (Link per Mail erhalten)
- Serie 03 gut gelöst.

Recap

Notation:

Spaltenstruktur: $A = \left(a^{(1)}, \dots, a^{(n)} \right)$

Zeilenstruktur: $A = \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ \vdots \\ a^{[m]} \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n}} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \boxed{a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{matrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ \\ a^{[m]} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ A = \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a^{(1)} & a^{(2)} & & a^{(n)} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrix Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir können dieses Produkt wie zwei Multiplikationen von Matrix mit Vektor sehen ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$)

$$AB = \left(Ab^{(1)} \quad Ab^{(2)} \quad \dots \quad Ab^{(p)} \right)$$

Dadurch kann man Matrix Multiplikationen in bestimmten Fällen einfach ablesen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

zwei mal erste Spalte

zweite Spalte + dritte Spalte

Inverse Matrizen:

Die nxn Inverse von einer nxn Matrix A wird mit A^{-1} bezeichnet. Es gilt:

$$AA^{-1} = \mathbb{I}_n$$

Wenn A eine Inverse besitzt, so nennt man A regulär oder invertierbar.

Die Inverse ist immer eindeutig bestimmt. D.h. es gibt immer nur eine Matrix A^{-1} welche A invertiert.

Wenn wir an Matrizen als Transformationen denken, macht A^{-1} die Transformation von A rückgängig.

Inverse contd.

Um nun die Inverse einer beliebigen nxn Matrix zu berechnen benutzen wir den Gauss-Jordan Algorithmus:

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I-2\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-5\,III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{-1\cdot III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{4\,III-II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{II+I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Allgemein führen wir folgende Operation durch: $A \mid \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I} \mid A^{-1}$

Für 2x2 Matrizen gilt ausserdem:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Bsp: Bestimme die Inverse von A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2\cdot 3 - 2\cdot 1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Wenn A eine Inverse besitzt, so nennt man A regulär oder invertierbar.

Wie Kann es sein das nicht immer eine Inverse exsistiert?

Letzte Woche sahen wir, dass bei einem Produkt zwischen Matrix und Vektor wieder ein Vektor entsteht. Das Resultat Kann also als transformierte Version des ursprünglichen Vektors gesehen werden. Mit der Inversen A^{-1} von A können wir die Transformation rückgänig machen. Mathematisch heisst das:

$$\text{wenn } A \cdot v = w \quad \text{dann ist } A^{-1} \cdot w = v$$

Die Multiplikation mit A^{-1} macht die Multiplikation von A rückgänig

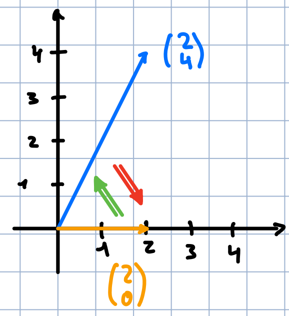
i.) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A_1^{-1}$

Welche Lösung hat dann $A_1 x = b$?

→ Es gibt ein eindeutiges x für jedes b

Es Kann also eine Matrix existieren, sodass eindeuti

$$A_1^{-1} b = x$$



ii.) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A_2^{-1}$

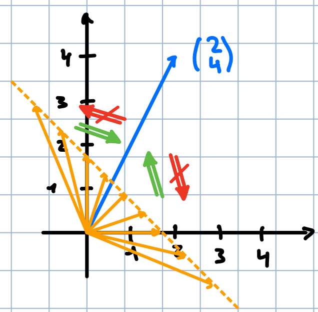
Welche Lösung hat dann $A_2 x = b$?

→ Es gibt unendlich viele x für jedes b.

Jedes x der Form $\binom{1}{1} + t \cdot \binom{1}{-1}$ erfüllt die Gleichung

Wir können also keine eindeutige Inverse finden, sodass

$$A_2^{-1} b = x$$



Matrix-Arcade: 1-2

Betrachten wir nochmal genauer A_1 & A_2. Was fällt auf?

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ Rang$(A_1) = 2$ $\Rightarrow$ A ist regulär

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ Rang$(A_2) = 1$ $\Rightarrow$ A ist singulär

Es gilt somit, dass jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär/invertierbar ist wenn der Rang von A voll ist.

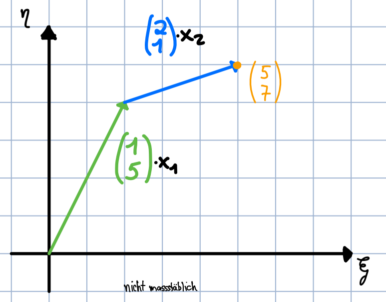
Im Allgemeinen sind nun folgende Aussagen für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

— A ist invertierbar/regulär

— A hat vollen Rang

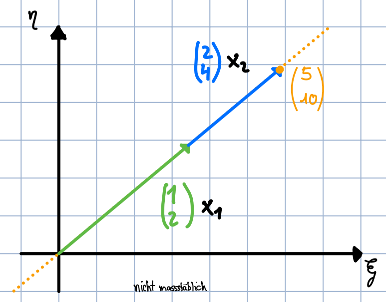
– $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar

– $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung



Rang voll

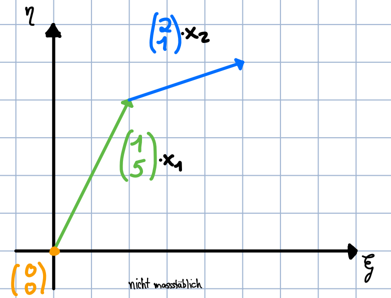
Geogebra



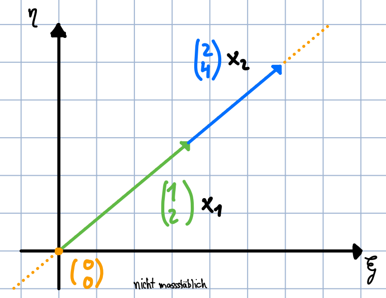
Rang nicht voll

– Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$

HLGS → $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$



Rang voll



Rang nicht voll

Diese Liste von Zusammenhängen wird weiter wachsen.

3.4 Wichtige Zusammenhänge

Folgende Aussagen sind für $A^{n \times n}$ äquivalent:

- $rang(A) = n$
- Das LGS $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar.
- Das LGS $Ax = b$ besitzt genau eine Lösung.
- Das homogene LGS $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.
- A ist invertierbar.

Orthogonale Matrizen

Eine nxn Matrix heisst orthogonal, falls:

$$A^T A = \mathbb{I}_n \quad \text{bzw.} \quad A^{-1} = A^T$$

→ d.h. orthogonale Matrizen sind u.A. sehr leicht invertierbar!

Orthogonale Matrizen erfüllen immer diese Eigenschaften:

i. Zeilen haben Länge 1 und sind senkrecht aufeinander

ii. Spalten haben Länge 1 und sind senkrecht aufeinander

Bsp: Sei A orthogonal:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

ii. $\sqrt{a_1^2 + a_3^2} \overset{!}{=} 1$, $\sqrt{a_2^2 + a_4^2} \overset{!}{=} 1$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Wenn Bedingungen erfüllt → Orthogonal! (Es reicht eine von beiden)

Wie sehen orthogonale Matrizen graphisch aus?

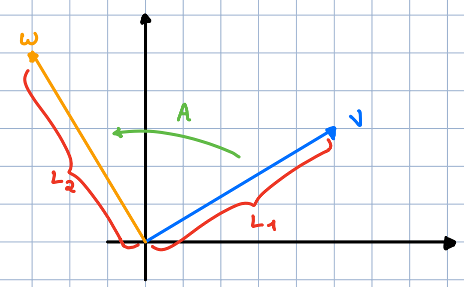
Aus VL: Orthogonale Matrizen beschreiben Isometrien

Intuitiv bzw. graphisch bedeutet das folgendes: (Sei A orthogonal)

i. Vektoren bleiben gleich lang.

$Av = w$

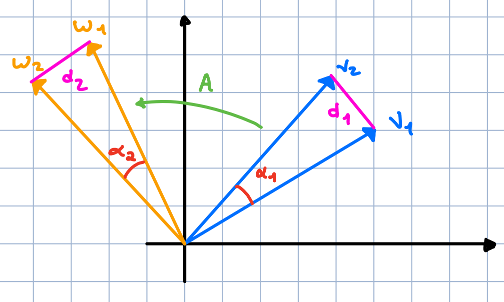
$L_1 = L_2$



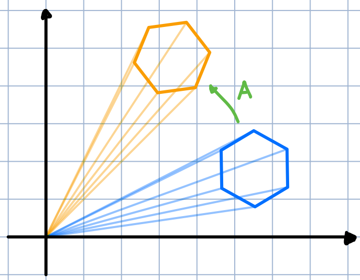
ii. Distanzen bzw. Winkel bleiben erhalten.

$Av = w$

$\alpha_1 = \alpha_2$, $d_1 = d_2$



Insgesamt behalten Formen ihre Geometrie bei.



Matrix-Arcade : 3

Beispiele sind Rotationen und Spiegelungen

In 2-D können wir Vektoren um einen beliebigen Winkel α mit folgender Matrix rotieren.

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

In 3-D können wir um Achsen rotieren (Givens-Rotation)

um x_2-Achse

$$u(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

um x_1-Achse

$$u(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(Analog für x_3)

Matrix-Arcade : 4,5

Beispielaufgaben

Löse das LGS <u>**OHNE**</u> das Gaussverfahren zu benutzen:

$$\underbrace{\overset{Q}{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}}_{\text{orthogonal}} \overset{x}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} \overset{=}{=} \overset{b}{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}} \iff \overset{x}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} \overset{=}{=} \overset{Q^{-1} = Q^T}{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}} \overset{b}{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

$\rightarrow Q^{-1} = Q^T$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tipps zur Serie

1.) Wichtig! Zusammenhäng aus Übungsstunde und Zusammenfassung brauchen

2.) Wichtig! Gaussen!

3.) Welche Dimension muss B haben? Rechnet zuerst mit allgemeinen Einträgen $b_{11}, b_{12},$ etc.

4.) Rechenaufwendig! Versucht es selber, training für Kreuzprodukt, Matrixmultiplikation etc.

- Senkrecht → Skalarprodukt = 0