Übung 07 (03.11.23)

Hinweise zu Serie 04:

i.) Bei Matrix Multiplikation auf Dimensionen achten. Prüfen ob Resultat Sinn ergibt.

ii.) Achtung beim Abschreiben. Am besten ausschreiben:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \qquad \text{nicht: } \quad A^2 = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

Recap

Inverse:

Gauss-Jordan Algorithmus:

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I-2\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-5\,III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{-1\cdot III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{4\,III-II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{5}\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{II+I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Für 2×2 Matrizen gilt ausserdem:

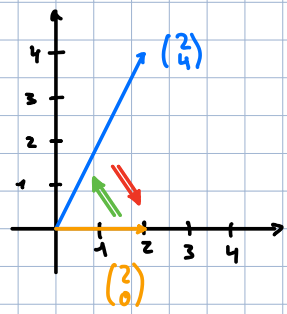
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen sind nun folgende Aussagen für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **äquivalent**:

- A ist invertierbar/regulär
- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung

Graphisch können wir uns das Verhältnis zwischen Rang und Invertierbarkeit wie folgt vorstellen:

i.) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \text{Rang}(A_1) = 2 \quad$ $A_1 x = b$

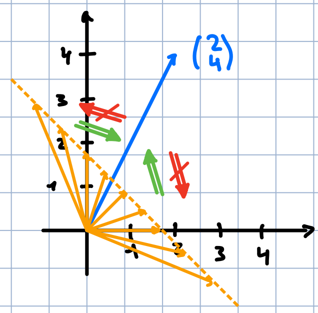


→ Es gibt ein eindeutiges x für jedes b

Es kann also eine Matrix existieren, sodass eindeutig

$$A_1^{-1} b = x$$

ii.) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \text{Rang}(A_2) = 1 \quad$ $A_2 x = b$



→ Jedes x der Form $\binom{1}{1} + t \cdot \binom{1}{-1}$ erfüllt die Gleichung

Wir können also keine eindeutige Inverse finden, sodass

$$A_2^{-1} b = x$$

Orthogonale Matrizen:

Eine nxn Matrix heisst orthogonal, falls:

$$A^T A = \mathbb{I}_n \quad \text{bzw.} \quad A^{-1} = A^T$$

→ d.h. orthogonale Matrizen sind u.A. sehr leicht invertierbar!

Orthogonale Matrizen erfüllen immer diese Eigenschaft:

→ Spalten/Zeilen sind Einheitsvektoren und stehen paarweise senkrecht zueinander.

Bsp: Sei A orthogonal:

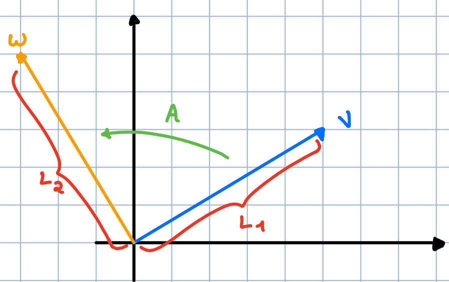
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \text{ dann gilt: } \sqrt{a_1^2 + a_3^2} \overset{!}{=} 1, \quad \sqrt{a_2^2 + a_4^2} \overset{!}{=} 1, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Transformationen die von orthogonalen Matrizen beschrieben werden erfüllen immer folgende Bedingungen:

i. Vektoren bleiben gleich lang.

$Av = w$

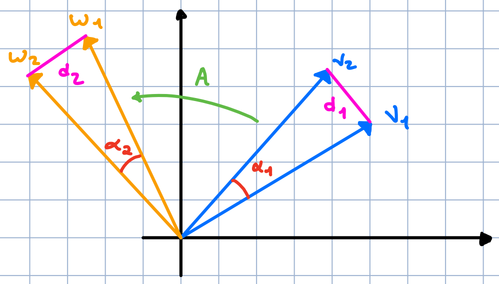
$L_1 = L_2$



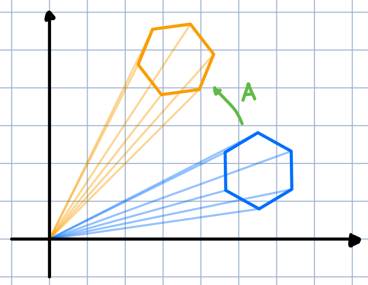
ii. Distanzen bzw. Winkel bleiben erhalten.

$Av = w$

$\alpha_1 = \alpha_2$, $d_1 = d_2$



Insgesamt behalten Formen ihre Geometrie bei.



Beispiele sind Rotationen:

2-D

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

3-D

$$U(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

LR-Zerlegung

Wie können wir ein LGS der Form $Ax=b$ für viele b schnell lösen?

Idee:

Zerlege $A = LR$

L ist dabei eine Linksdreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$

R ist eine Rechtsdreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix}$

mit hilfe dieser Zerlegung müssen wir nicht mehr Gaussen! Es gilt dann:

$$Ax = LRx = Ly = b$$

d.h. um für ein generelles b zu lösen gehen wir wie folgt vor:

i. $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen

ii. $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

i. $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\text{Aus Aufgabe}}$$

ii. $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}}_{R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Lösung für } Ax=b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Löse zunächst:

$Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} \rightarrow y = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 17 \end{pmatrix}$$

und danach:

$Rx = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 17 \end{pmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um L & R zu berechnen geht man wie folgt vor:

i. A Gaussen

$$\begin{pmatrix}1&3&7\\2&4&5\\3&1&2\end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{-3}\;\boxed{-2}} \begin{pmatrix}1&3&7\\0&-2&-9\\0&-8&-19\end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{-4}} \begin{pmatrix}1&3&7\\0&-2&-9\\0&0&17\end{pmatrix} = R$$

ii. Bein Gaussen merken wir uns den Skalar mit dem wir eine Zeile multiplizert haben um eine Null zu erzeugen.

$$\begin{pmatrix}1&3&7\\2&4&5\\3&1&2\end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{-2}} \begin{pmatrix}1&3&7\\0&-2&-9\\3&1&2\end{pmatrix}$$

In diesem Fall wurde zum Erzeugen einer Null (a.d.S. A_{21}) die erste Zeile mit -2 multipliziert. Der Eintrag L_{21} in der entsprechenden L Matrix wird nun 2 ($-1 \cdot$ Skalar)

Der Rest der L-Matrix ist die Identität. Daraus ergibt sich:

$$\begin{pmatrix}1&3&7\\2&4&5\\3&1&2\end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{-3}\;\boxed{-2}} \begin{pmatrix}1&3&7\\0&-2&-9\\0&-8&-19\end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{-4}} \begin{pmatrix}1&3&7\\0&-2&-9\\0&0&17\end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{pmatrix}$$

Wenn wir beim Gaussen Zeilenvertauschungen durchführen müssen wir diese speziell berücksichtigen. Wir führen eine Permutationsmatrix ein. Diese Matrix sagt uns wie Zeilen vertauscht wurden.

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{P}\;\middle|\;\begin{matrix}0&3&-2\\4&-2&1\\2&-1&1\end{matrix}\right) \longrightarrow \left(\underbrace{\begin{matrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{matrix}}_{P}\;\middle|\;\begin{matrix}2&-1&1\\4&-2&1\\0&3&-2\end{matrix}\right) \longrightarrow \cdots$$

Somit werden alle Vertauschungen registriert.

Die LR-Zerlegung wird dadurch zu:

$$PA = LR$$

Um damit nun ein LGS lösen zu können gehen wir wie folgt vor:

i. $Ly = Pb$ durch Vorwärtseinsetzen lösen

ii. $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen Lösen

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{PA}_{LR}x = Pb \Leftrightarrow L\underbrace{Rx}_{y} = Pb \Leftrightarrow Ly = Pb$$

Kochrezept anwenden können! Ist alles auf Zusammenfassung:

2.8 LR-Zerlegung

$$\boxed{A = L \cdot R}$$

Mit der LR-Zerlegung kann man eine quadratische Matrix A in das Produkt einer Linksdreiecksmatrix L sowie einer Rechtsdreiecksmatrix R zerlegen. Dies ermöglicht ein effizienteres Lösen von $Ax = b_i$ mit vielen verschiedenen b_i.

Bsp: Löse $Ax = b$ durch LR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$

Vorgehen:

1. Bringe A durch Zeilensubtraktion in Dreiecksform. Bei erzeugten Nullstellen speichert man, das Wievielfache einer anderen Zeile von dieser Zeile subtrahiert wurde.

   Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \boxed{2} & 2 \end{pmatrix}$

   $\boxed{2}$: Von dieser Zeile wurde das 2-fache einer anderen subtrahiert.

2. Bestimme L und R. L besteht aus den markierten Einträgen und 1 auf der Diagonale, R aus den nichtmarkierten Einträgen.

   Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \boxed{2} & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Löse $Ly = b$ (einfach, da L eine Dreiecksmatrix).

4. Löse $Rx = y$ (einfach, da R eine Dreiecksmatrix).

LRP-Zerlegung mit Permutationsmatrix P

$$\boxed{P \cdot A = L \cdot R}$$

Manchmal ist es notwendig, dass man bei (1) zusätzlich Zeilen vertauschen kann. Dies wird durch eine Permutationsmatrix P möglich.
Hierzu schreibe man zu Beginn die Identitätsmatrix neben A, und macht mit dieser alle Zeilenvertauschungen mit:

Bsp: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Auf der linken Seite steht am Ende die Permutationsmatrix P. L und R werden auf die gleiche Weise wie üblich bestimmt. Bei (3) löse man nun $Ly = Pb$, bei (4) weiterhin $Rx = y$.

Stoffübersicht

Ausführen von Algorithmen

Gauss-Algorithmus

Matrix-Multiplikation

Gauss-Jordan-Algorithmus

LR-Zerlegung

Theoretische Konzepte

Wann / wie viele Lösungen hat ein LGS

Homogene LGS

Rang

Transponierte

Inverse

Orthogonale Matrizen

Beispielaufgabe

Führe eine LR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{pmatrix}$ durch:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-3) \\ (1) \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} (2) \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Manchmal werden L und R in einer einzelnen Matrix gespeichert

Tipps zur Serie

1.) Nachrechnen, Geometrisch überlegen, Zusammenfassung.

2.) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Rang und Invertierbarkeit?

3.) Anspruchsvoll!

a.) V soll orthogonal sein, mit Rechenregeln der Zsfg. umformen.

b.) Ohne Gauss lösen ($Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$)

4.) Herleitung der 2x2 - Inversen Regel, Gauss-Jordan benutzen.