Übung 08 (10.11.23)

Danke für das Feedback!

- Zu den Korrekturen: Markiert eine Aufgaben die ihr korrigiert haben wollt. Sonst wähle ich eine aus. (Wegen Zeitaufwand kann ich nicht alles korrigieren.)
  Gebt nur ab wenn Ihr euch nachher auch die Korrektur anschaut.
- Zum Raum: Ich werde mit dem Hauplassisten sprechen. (Schwerig einen anderen Raum zu bekommen.)

Recap

Wie können wir ein LGS der Form $Ax=b$ für viele b schnell lösen?

Idee:

Zerlege $A = LR$

L ist dabei eine Linksdreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$

R ist eine Rechtsdreiecksmatrix $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{pmatrix}$

mit hilfe dieser Zerlegung müssen wir nicht mehr Gaussen! Es gilt dann:

$$Ax = LRx = Ly = b$$

d.h. um für ein generelles b zu lösen gehen wir wie folgt vor:

i. $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen

ii. $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Wie werden L und R berechnet?

Vorgehen:

(1) Bringe A durch Zeilensubtraktion in Dreiecksform. Bei erzeugten Nullstellen speichert man, das Wievielfache einer anderen Zeile von dieser Zeile subtrahiert wurde.

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \boxed{2} & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$: Von dieser Zeile wurde das 2-fache einer anderen subtrahiert.

(2) Bestimme L und R. L besteht aus den markierten Einträgen und 1 auf der Diagonale, R aus den nichtmarkierten Einträgen.

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ \boxed{2} & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) Löse $Ly = b$ (einfach, da L eine Dreiecksmatrix).

(4) Löse $Rx = y$ (einfach, da R eine Dreiecksmatrix).

Kurz: R ist die Dreiecksform von der Matrix die wir zerlegen wollen.

L ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2,\ -3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & -8 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir beim Gaussen Zeilenvertauschungen durchführen müssen wir diese speziell berücksichtigen. Wir führen eine Permutationsmatrix ein. Diese Matrix sagt uns wie Zeilen vertauscht wurden.

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{P} \left| \begin{matrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{matrix} \right. \longrightarrow \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}}_{P} \left| \begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{matrix} \right. \longrightarrow \dots$$

Die LR-Zerlegung wird dadurch zu:

LRP-Zerlegung mit Permutationsmatrix P

$$\boxed{P \cdot A = L \cdot R}$$

Manchmal ist es notwendig, dass man bei (1) zusätzlich Zeilen vertauschen kann. Dies wird durch eine Permutationsmatrix P möglich.
Hierzu schreibe man zu Beginn die Identitätsmatrix neben A, und macht mit dieser alle Zeilenvertauschungen mit:

Bsp: $\left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}\right) \Longrightarrow \left(\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix}\right)$

Auf der linken Seite steht am Ende die Permutationsmatrix P. L und R werden auf die gleiche Weise wie üblich bestimmt. Bei (3) löse man nun $Ly = Pb$, bei (4) weiterhin $Rx = y$.

Um damit nun ein LGS lösen zu können gehen wir wie folgt vor:

i. $Ly = Pb$ durch Vorwärtseinsetzen lösen

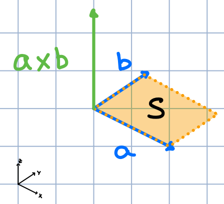
ii. $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen Lösen

Determinante

In der Bonusaufgabe habt Ihr folgendes herausgefunden:

- Die Fläche des Parallelogramms, welches von zwei Vektoren aufgespannt wird, lässt sich mit dem Kreuzprodukt berechnen.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \rightarrow |a_1 b_2 - a_2 b_1| = S$$

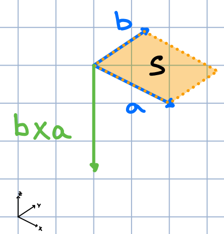


$|a \times b| = S$

Das Kreuzprodukt liefert den orientierten Flächeninhalt. Eine Fläche könnte demnach "negativ" sein wenn $a_1 b_2 < a_2 b_1$ ist. Die Orientierung kann mit der Rechten-Hand-Regel bestimmt werden.

Es gilt: $a \times b = - b \times a$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 b_1 - a_1 b_2 \end{pmatrix} \rightarrow |a_2 b_1 - a_1 b_2| = S$$

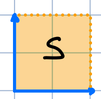


$|b \times a| = S$

Betrachten wir zunächst die Fläche die von den Einheitsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ beschrieben wird.

Mit dem Kreuzprodukt erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} \rightarrow |1| = 1$$



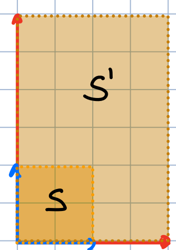
$S = 1$

Was passiert nun mit dem Einheitsquadrat wenn wir auf beide Vektoren eine Matrix A anwenden.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Fläche S' lässt sich durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$ berechnen.

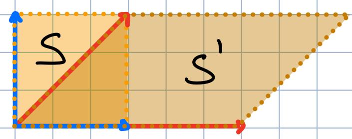
Im Vergleich zum Einheitsquadrat ist die Fläche 6 mal grösser geworden.



Betrachten wir nun ein ähnliches Beispiel indem die Vektoren durch eine Matrix C transformiert werden

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

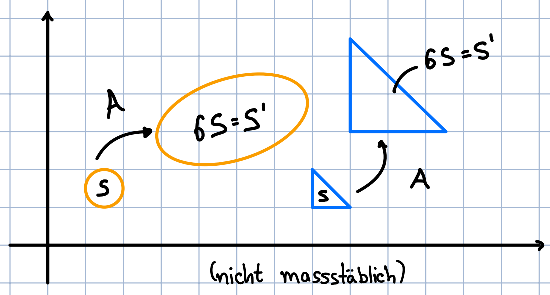
$$S' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$



Die Fläche ist 2 mal grösser geworden.

Der Faktor mit welchem die Fläche des Einheitsquadrats skaliert wird lässt sich bei linearen Transformationen auf jede Ausgangsform übertragen. Alle Flächen werden demnach mit dem selben Faktor skaliert. Die Form muss nicht erhalten bleiben

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Wie können wir diesen Faktor bestimmen?

Wenden wir uns nochmals an das Einheitsquadrat. $(b^{(1)}\ b^{(2)}) = B$

Wir nutzen, dass $(Ab^{(1)}\ Ab^{(2)}) = AB$ gilt und somit können wir die transformierten Vektoren aus dem Produkt AB auslesen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2 \quad \text{d.h.} \quad AB = A$$

Wir erkennen nun, dass die Spalten der Matrix A unsere transformierten Einheitsvektoren sind.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Fläche des von $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogram können wir mit dem Kreuzprodukt berechnen.

$$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = 6$$ (da Ausgangsfläche =1 erhalten wir direkt den gewünschten Faktor)

Einfacher können wir direkt aus A die Vektoren auslesen und die Definition des Kreuzproduktes anwenden.

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix} \rightarrow |a_1b_2-a_2b_1| = S$$

$$A = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{pmatrix} \longrightarrow a_1b_2-a_2b_1$$ = Faktor mit welchem Flächen skaliert werden.

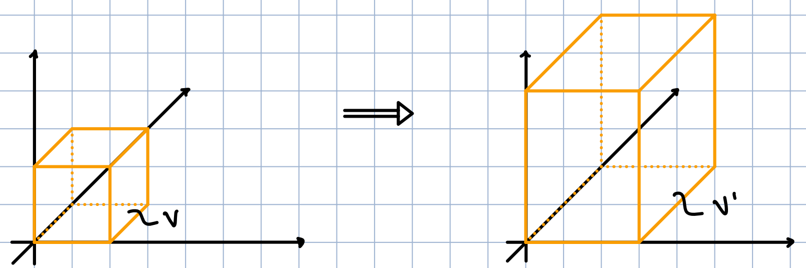
$= \det(A)$

diese Grösse heisst Determinante.

Was passiert nun wenn die Determinante negativ ist? Wie können Flächen negativ skaliert werden?

Erinnerung: Orientierter Flächeninhalt! Eine negative Determinante bedeutet dass die Fläche skaliert und Ihre orientierung invertiert wird. (Orientierung lässt sich mit Rechte-Hand-Regel überprüfen)

In 3-D beschreibt die Determinante wie sich Volumen verändern:



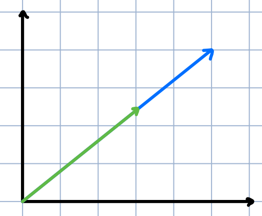
Wie genau die Determinante allgemein berechnet wird, schauen wir uns nächste Woche an!

Wann ist die Fläche des, von zwei Vektoren aufgespannten, Parallelograms null?

D.h. wann $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$?

Immer wenn die Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ parallel sind.

Es gilt dann $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

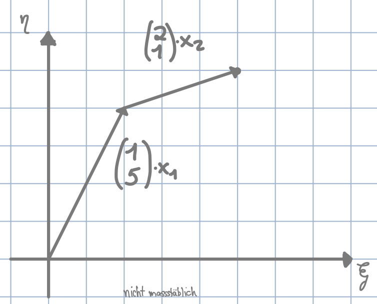


Was bedeutet das für $\det(A)$ wenn $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ parallele Spalten hat?

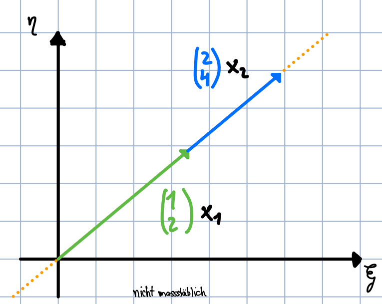
Eine 2×2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ hat also $\det = 0$ wenn die Spalten parallel sind.

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Erinnern wir uns nun an die Spalteninterpretation von LGS der Form $Ax=b$ zurück



Rang voll



Rang nicht voll

hier sahen wir, dass wenn beide Spalten in die selbe Richtung zeigen bzw. parallel sind, der Rang(A) nicht voll ist.

Rang und Determinante hängen also zusammen.

Genauer können wir sagen: $\text{Rang}(A)$ ist voll $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A ist invertierbar/regulär
- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- $\det(A) \neq 0$

Beispielaufgaben

Welche Bedingungen müssen für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten so, dass A orthogonal ist

Sei $A = \begin{bmatrix} 2/3 & a & 1/3 \\ 1/3 & b & 2/3 \\ -2/3 & c & 2/3 \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c = 0 \Rightarrow 2a + b = 2c$

$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c = 0 \Rightarrow a + 2b = -2c$

$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$

Auflösen: $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{3}$

Tipps zur Serie

1.) Wichtig! welche Eigenschaften müssen erfüllt sein?

2.) Sinnvoll. Keine Tipps, Rezept anwenden!

3.) Aufgabe um zu sehen wo LinAlg nützlich ist.

Das LGS lässt sich nur mit Matlab lösen.

4.) Schwer! mehr Geometrie als LinAlg!

a.) Versucht die einzelenden Komponenten von y zu finden (Projektionen)

b.) Die Operationen von a.) als Matrix ausdrücken

c.) In Definition für Orthogonale einsetzen und Transpositionseigenschaften ausnutzen.