Übung 09 (17.11.23)

Zur Korrektur von Serie 06:

- Achtet was gefragt ist! Gauss-Jordan ist aufwendig und sehr Fehler anfällig (Vorzeichenfehler etc.)

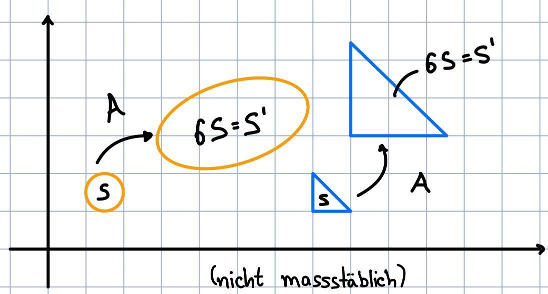
> **2.** *Reguläre und Singuläre 3×3-Matrizen*
>
> (a) Gegeben sei die Matrix
> $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
> Zeigen Sie, dass A regulär ist.

- A ist invertierbar/regulär
- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- $\det(A) \neq 0$

Recap

Alle Matrizen die wir in LinAlg behandeln beschreiben Transformationen in denen alle Flächen mit dem selben Faktor skaliert werden. Die Form muss nicht erhalten bleiben

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Wie können wir diesen Faktor bestimmen und warum ist er so wichtig?
Determinante!

Dafür untersuchen wir, wie sich die Fläche, welche von den Einheitsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird, verändert wenn, auf beide dieselbe Matrix angewendet wird.

Wir erkennen, dass die Spalten der Matrix A unsere transformierten Einheitsvektoren sind.

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dann ist: $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Da die Ausgangsfläche $S=1$ ist können wir nun direkt aus den Spalten von A die Determinante bestimmen. Die Determinante ist nun die Fläche welche von den Spaltenvektoren von A aufgespannt wird.

Kreuzprodukt von Spaltenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = |A| = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Was passiert nun wenn die Determinante negativ ist? Wie können Flächen negativ skaliert werden?

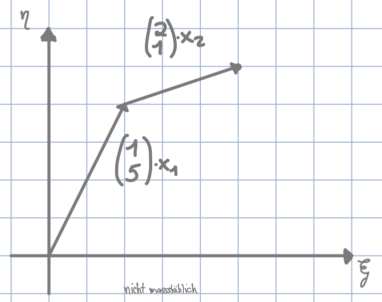
Erinnerung: Orientierter Flächeninhalt! Eine negative Determinante bedeutet dass die Fläche skaliert und Ihre orientierung invertiert wird.

Wenn die Spaltenvektoren parallel sind wird $\det(A) = 0$.

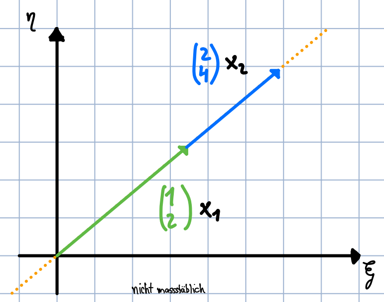
Für parallele Vektoren gilt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

In Woche 3 sahen wir bereits, dass bei parallelen Spaltenvektoren das LGS $Ax=b$ keinen vollen Rang hat.



Rang voll

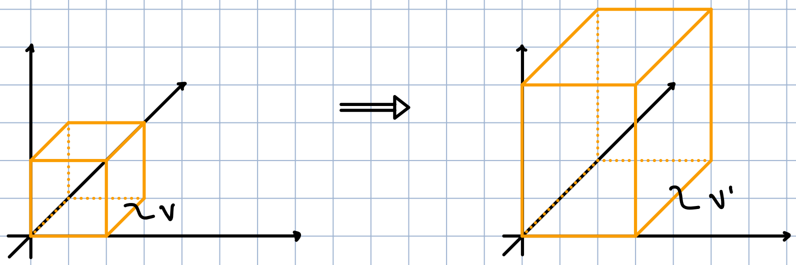


Rang nicht voll

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A ist invertierbar/regulär
- A hat vollen Rang
- $Ax=b$ ist für beliebiges b lösbar
- $Ax=b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- Das homogene LGS $Ax=0$ hat nur die triviale Lösung $(x=0)$
- $\det(A) \neq 0$

Bis jetzt haben wir nur den 2-D Fall betrachtet. In 3-D beschreibt die Determinante wie sich Volumen verändern:



In höheren Dimensionen gibt es keine geometrische Interpretation mehr.

Determinante cont.

Wie lässt sich nun die Determinante berechnen?

- Allgemein
- Fertige Formeln

Allgemein kann man die Determinante rekursiv definieren:

$$\det A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{oder} \quad \det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Zum ausrechnen mit dem Lapceschen Entwicklungssatz: (für jede nxn Matrix)

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Laplace'scher Entwicklungssatz:
Bei den meisten Matrizen ineffizient. Kann jedoch bei Matrix mit vielen Nullen in einer Zeile oder Spalte geschickt angewendet werden.

1. Zeile oder Spalte auswählen (dort wo viele Nullen).
2. Jedem Element dieser Zeile/Spalte ein Vorzeichen zuordnen (Schachbrett).
3. Für jedes Element die zugehörige Zeile und Spalte streichen und Unterdeterminante bestimmen.
4. Jede Unterdeterminante mit zugehörigem Element und Vorzeichen multiplizieren und addieren.

i.) Zeile /Spalte auswählen (viele Nullen)

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

ii.) Vorzeichen (Schachbrett)

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \qquad \det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

iii.) Unterdeterminanten bestimmen

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

Erstes Element der ausgewählten Spalte:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow +0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Zweites Element der ausgewählten Spalte:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow -(-2) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Drittes Element der ausgewählten Spalte:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow +3 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

iv.) Zusammen addieren:

$$\det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = +0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2(-10-18) + 3(4-3) = -53$$

Eher aufwendig, geeignet für Matrizen mit vielen Nullen.

Für 2x2 und 3x3 gibt es fertige Formeln:

- Für 2x2 aus letzter Übung:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

- Für 3x3 gibt es Regel von Sarrus: (Spatprodukt)

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix} \right) \underset{\text{Skalarprod.}}{\circ} \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$$

Positiv wenn Vektoren in Multiplikationsreihenfolge ein Rechtssystem bilden.

"Bildlich":

$$\left(\begin{matrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{matrix}\right)\begin{matrix}a&b\\d&e\\g&h\end{matrix} \qquad \left(\begin{matrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{matrix}\right)\begin{matrix}a&b\\d&e\\g&h\end{matrix}$$

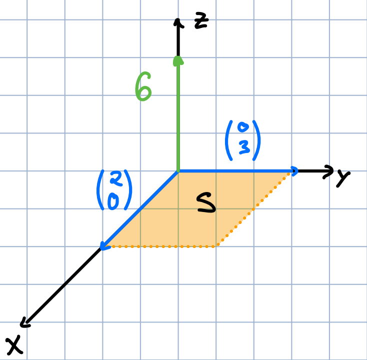
$$+\;+\;+ \qquad\qquad -\;-\;-$$

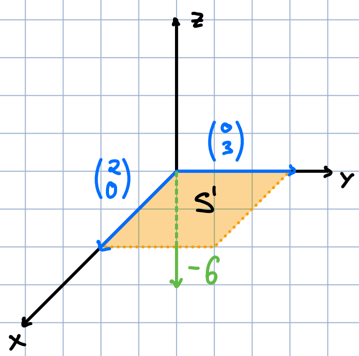
$$aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

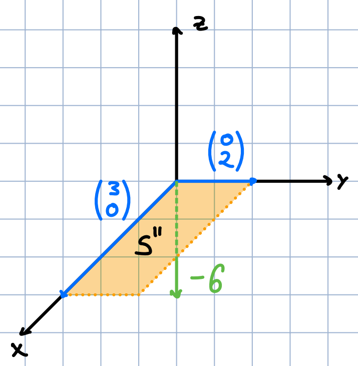
Durch geschicktes modifizieren von A lässt sich die Rechnung vereinfachen. Wir können folgende Modifikationen durchführen. (Satz 3.1.)

i.) Vertauschen von Zeilen / Spalten → vorzeichen der Determinante wechselt

$$A = \begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix}0&2\\3&0\end{pmatrix} \qquad A'' = \begin{pmatrix}0&3\\2&0\end{pmatrix}$$



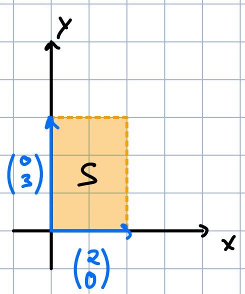


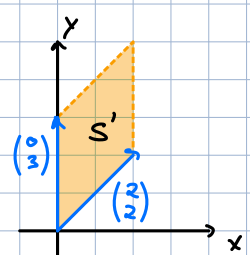


$2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 6 \qquad 0 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -6 \qquad 0 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -6$

ii.) Bei Spalten- Zeilenaddition bleibt Determinante gleich

$$A = \begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix}2&0\\2&3\end{pmatrix}$$





$S = 6 \qquad S' = 6$

- Die Determinante einer Dreiecksmatrix lässt sich einfach bestimmen:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = ad - 0b = ad$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = aei + bf0 + c00 - 0ec - 0fa - i0b = aei$$

- Wenn A eine Nullzeile / Nullspalte besitzt, so ist $\det(A) = 0$. Man könnte immer nach der Nullzeile / Nullspalte entwickeln und 0 erhalten.

- Besitzt A zwei identische Zeilen so ist $\det(A) = 0$. Der Rang ist nicht voll (es kann eine Nullzeile durch Spalten- Zeilenaddition erzeugen.

Alle Regeln sind auch auf der Zsfg.

3.2 Rechenregeln Determinante

Neben den Zeilen/Spalteneigenschaften von 3.1 gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} det(AB) &= det(A) \cdot det(B) \\ det(A^T) &= det(A) \\ det(diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)) &= d_1 \cdot d_2 \cdots d_n \\ det(Dreiecksmatrix) &= d_1 \cdot d_2 \cdots d_n \\ det(A^{-1}) &= 1/det(A) \end{aligned}$$

Beispielaufgaben

1.) Berechne die Determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = 16 - 5 = \underline{\underline{11}}$$

2.) Berechne die Determinante

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 1 + 6 - 4 - 0 - 0 = \underline{\underline{3}}$$

3) Berechne die Determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{da Rang nicht voll}$$

4.) Berechne die Determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Entwicklung nach erster Zeile:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\cdot2\cdot2 + 1\cdot1\cdot0 + 2\cdot0\cdot2 - 2\cdot2\cdot0 - 1\cdot2\cdot4 - 2\cdot1\cdot0$$

$$+ 2\cdot\left[2\cdot1\cdot2 + 1\cdot2\cdot0 + 3\cdot4\cdot2 - 3\cdot1\cdot0 - 2\cdot2\cdot2 - 2\cdot1\cdot4\right]$$

$$= 16 - 8 + 2(4 + 24 - 8 - 8) = \underline{\underline{32}}$$

5.) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Bestimme die Determinante von $(A^T)^2$

3.2 Rechenregeln Determinante

Neben den Zeilen/Spalteneigenschaften von 3.1 gelten folgende Rechenregeln:

$$det(AB) = det(A) \cdot det(B)$$
$$det(A^T) = det(A)$$
$$det(diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)) = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$$
$$det(Dreiecksmatrix) = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$$
$$det(A^{-1}) = 1/det(A)$$

$$\det((A^T)^2) = \det(A^T)\det(A^T) = \det(A)\cdot\det(A) = \det(A)^2$$

Entwicklung nach erster Zeile

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2+1-1 = 2$$

$$\Rightarrow \det((A^T)^2) = \det(A)^2 = 2^2 = \underline{\underline{4}}$$

6.) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Berechne $\det(A)$.

Gaussen ohne Zeilenvertauschungen ändert $\det(A)$ nicht!

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \\ \\ \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Entwicklung nach erster Spalte}} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \\ (-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Entwicklung nach erster Spalte}} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Sarrus}} = -(0\cdot3\cdot4 + 2\cdot0\cdot7 + 3\cdot2\cdot4 - 3\cdot3\cdot7 - 0\cdot4\cdot0 - 4\cdot2\cdot2)$$

$$= -(24 - 63 - 16) = \underline{\underline{55}}$$

Tipps zur Serie

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A ist invertierbar/regulär
- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- $\det(A) \neq 0$