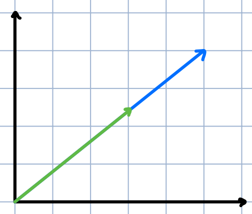
# Übung 10 (24.11.23)

Heute grosser Recap vom ganzen Stoff bis jetzt. Vorher noch ergänzung zu letzter Woche.

---

Letzte Woche sahen wir, dass immer wenn die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ einer $2\times2$ Matrix A parallel sind, $\det(A)=0$ gelten muss.

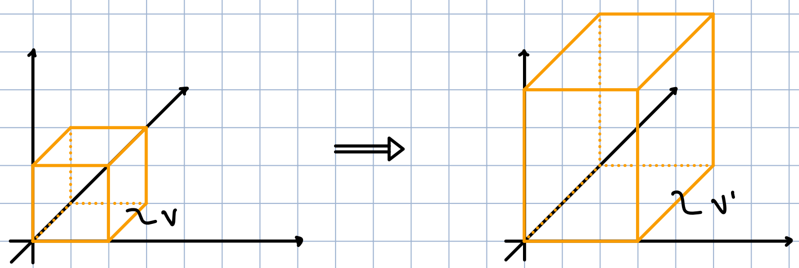
$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}, \quad \lambda\in\mathbb{R}$$



Da dann die aufgespannte Fläche zwischen $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ Null ist.

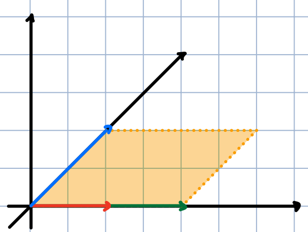
Um diese Logik auch auf mehrere Dimensionen anwenden zu können muss die Bedingung veralgemeinert werden.

Betrachten wir dafür 3-D. Hier gibt die Determinante Auskunft über Änderungen des von den Spaltenvektoren aufgespanntem Volumen.



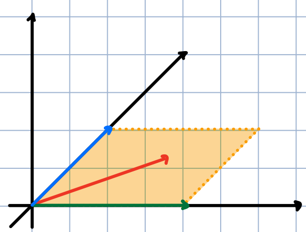

Welche Bedingungen müssen hier gelten damit $\det(A)=0$? Geogebra.

Fall 1.)



$\nearrow$ und $\nearrow$ sind Parallel

Fall 2.)



$\nearrow$ liegt in der von $\nearrow$ und $\nearrow$ aufgespannten Ebene.

Wenn Fall 2 vorliegt, dann ist $\nearrow$ linear abhänig von $\nearrow$ und $\nearrow$

Wann sind Vektoren linear abhänig bzw. unabhänig?

Im 3-D Fall sind Vektoren linear abhänig wenn:

- Vektoren parallel sind
- einer der Vektoren durch eine Linearkombination der anderen Vektoren gebildet werden kann.

$$\alpha \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(Linearkombination)

Das Konzept der Linearen Abhänigkeit werden wir in Woche 12 noch vertiefen.

Fürs erste können wir festhalten, dass

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Spalten von } A \text{ sind linear unabhänig}$$

Somit wächst unsere Zusammenhangsliste weiter.

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges $b$ lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar/regulär
- $\det(A) \neq 0$
- Zeilen/Spalten sind linear unabhänig

# Recap

Alles beginnt mit LGS der Form $Ax = b$

$A$ ist eine $m \times n$ Matrix. $x, b$ sind $m \times 1$ Vektoren.

Das LGS hat dann

$m$ Gleichungen und $n$ Unbekannte

Um so ein LGS zu lösen führen wir den Gauss-Algorithmus ein. Dieser besteht aus zwei Grundoperationen welche die Lösungsmenge nicht ändern:

I.) vertauschen von zwei Zeilen

II.) addieren eines vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

So können wir die Koeffizienten Matrix A in Zeilenstufenform bringen.

Bsp.:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \quad \oplus(-1) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \quad \oplus(-2) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \end{array} \quad \oplus(-1) \quad \longrightarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \end{array}$$

Nun können wir durch Rückwärtseinsetzen das LGS lösen.

Es stellt sich nun die Frage wie viele Lösungen das LGS hat. Dafür betrachten wir das LGS in Zeilenstufenform.

$$\text{rang}=3\left\{\overbrace{\begin{array}{ccc}x_1 & x_2 & x_3\\ \hline 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -6\end{array}}^{n=3}\right.\begin{array}{|c}\\ \hline 1\\ 1\\ -3\end{array} \qquad \text{rang}=2\left\{\overbrace{\begin{array}{ccc}x_1 & x_2 & x_3\\ \hline 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{array}}^{n=3}\right.\begin{array}{|c}\\ \hline 1\\ 1\\ 0\end{array} \qquad \text{rang}=2\left\{\overbrace{\begin{array}{ccc}x_1 & x_2 & x_3\\ \hline 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{array}}^{n=3}\right.\begin{array}{|c}\\ \hline 1\\ 1\\ 1\end{array}$$

<u>eine Lösung</u>     <u>unendlich viele Lösungen</u>     <u>keine Lösung</u>

Hier führen wir das Konzept des Rangs ein.

Der Rang einer Matrix ist die Anzahl Zeilen, nach dem Gaussen, die nicht Null sind.

Wir erkennen hier dass

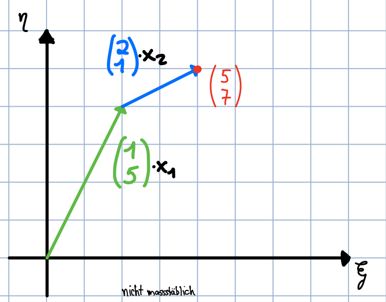
> Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:
>
> — A hat vollen Rang
>
> — $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung

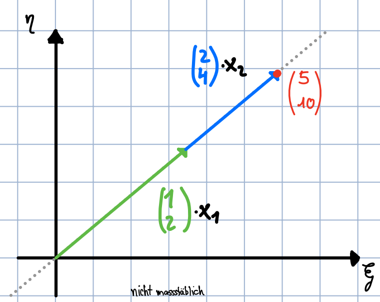
Wir können diese LGS auch graphisch interpretieren.

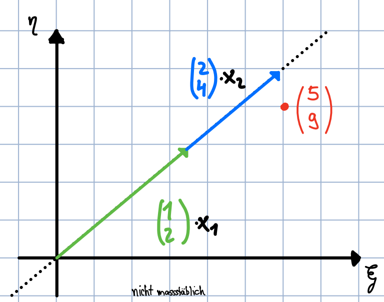
Betrachten wir hierfür die Spalten von A. Das LGS $Ax=b$ kann dann als Linearkombination der Spalten gesehen werden.

$$Ax = \underbrace{x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots x_n a^{(n)}}_{\text{Linear Kombination}} \qquad a^{(j)} = j\text{-te Spalte von } A$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$




$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 9 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$

→ Der Rang voll. Für jedes b kann eine eindeutige Lösung gefunden werden.

→ Der Rang ist nicht voll und die Verträglichkeitsbedingung ist efüllt, es gibt unendlich viele Lösungen

→ Der Rang ist nicht voll und die Verträglichkeitsbedingung ist nicht efüllt, es gibt keine Lösung

Der Rang ist gleich der Dimension des Lösungsraums. D.h. wenn der Rang voll ist können wir jeden beliebigen Punkt im Lösungsraum erreichen.

> Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:
>
> — A hat vollen Rang
>
> — $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
>
> — $Ax = b$ ist für beliebiges b lösbar

Wir sehen weiterhin, dass wir den Ursprung, bei vollem Rang, nur durch $x_1 = x_2 = 0$ erreichen können.

> Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **äquivalent**:
>
> - $A$ hat vollen Rang
> - $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
> - $Ax = b$ ist für beliebiges $b$ lösbar
> - Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$

Als nächstes betrachten wir Matrizen etwas näher. Vor allem wie wir mit ihnen Rechnen.

**Addition:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

→ Einträge werden einzelnd addiert

**Subtraktion:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

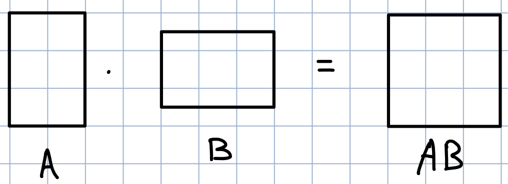
→ Einträge werden einzelnd subtrahiert

**Multiplikation:**

- mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ : $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

- mit einer anderen Matrix :

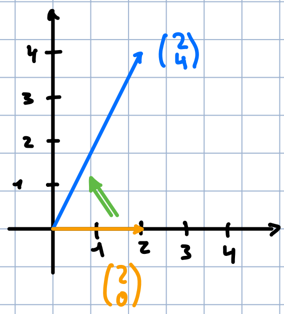
  seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$
  nicht alle Matrizen können zusammen multipliziert werden. Bedingun ist:




$$m \times n \cdot n \times p = m \times p$$

$$n = n$$

Graphisch beschreiben Matrizen Transformationen. Sie nehmen ein Vektor und durch Multiplikation wird dieser in einen anderen Transformiert.

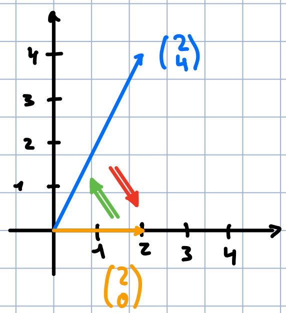



$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

↗ wurde von $A_1$ zu ↗ transformiert.

Kann ich diese Transformation auch Rückgängig machen?

i.) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_1^{-1}$



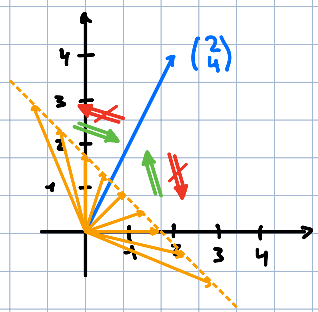

Welche Lösung hat dann $A_1 x = b$?

→ Es gibt ein eindeutiges $x$ für jedes $b$

Es kann also eine Matrix existieren, sodass eindeuti

$$A_1^{-1} b = x$$

ii.) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_2^{-1}$




Welche Lösung hat dann $A_2 x = b$?

→ Es gibt unendlich viele $x$ für jedes $b$.

Jedes $x$ der Form $\binom{1}{1} + t \cdot \binom{1}{-1}$ erfüllt die Gleichung

Wir können also keine eindeutige Inverse finden, sodass

$$A_2^{-1} b = x$$

Wenn A eine Inverse besitzt so nennt man A regulär.

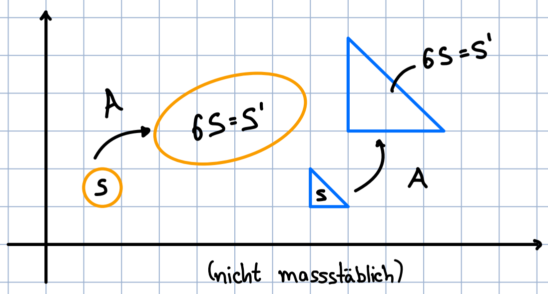
Wir konnten hier beobachten, dass nur wenn $Ax = b$ eindeutig lösbar ist, die inverse $A^{-1}$ existiert.

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges $b$ lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar/regulär

Alle Matrizen die wir in LinAlg behandeln beschreiben Transformationen in denen alle Flächen mit dem selben Faktor skaliert werden. Die Form muss nicht erhalten bleiben

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$




Wie können wir diesen Faktor bestimmen und warum ist er so wichtig?
Determinante!

Dafür untersuchen wir, wie sich die Fläche, welche von den Einheitsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird, verändert wenn, auf beide dieselbe Matrix angewendet wird.

Wir erkennen, dass die Spalten der Matrix A unsere transformierten Einheitsvektoren sind.

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ dann ist: $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Da die Ausgangsfläche $S=1$ ist können wir nun direkt aus den Spalten von A die Determinante bestimmen. Die Determinante ist nun die Fläche welche von den Spaltenvektoren von A aufgespannt wird.

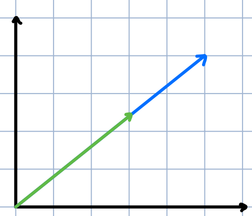
Kreuzprodukt von Spaltenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = |A| = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Wann ist nun diese Determinante $\det(A) = 0$ ?

In 2-D immer wenn:

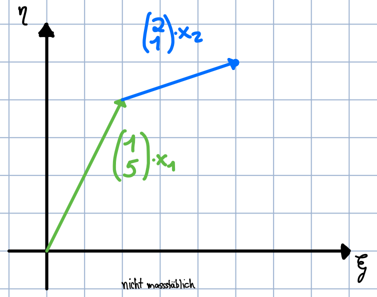
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



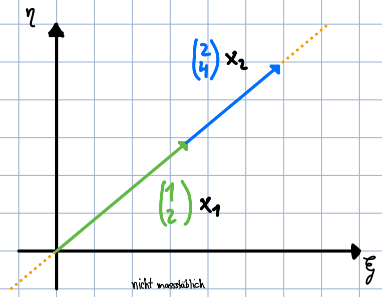
Da dann die aufgespannte Fläche zwischen $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ Null ist.

In anderen Worten immer wenn Spalten von A parallel sind.

Von vorher wissen wir bereits:




Rang voll




Rang nicht voll

Mit dem Begriff der linearen abhängigkeit lässt sich das auf beliebige Dimensionen erweitern.

Folgende Aussagen sind für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- A hat vollen Rang
- $Ax = b$ besitzt eine eindeutige Lösung
- $Ax = b$ ist für beliebiges $b$ lösbar
- Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $(x = 0)$
- A ist invertierbar / regulär
- $\det(A) \neq 0$

# Beispielaufgaben

6.) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Berechne $\det(A)$.

Gaussen ohne Zeilenvertauschungen ändert $\det(A)$ nicht!

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \\ \\ \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Entwicklung nach erster Spalte}]{} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \\ (-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Entwicklung nach erster Spalte}]{} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 7 & 4 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Sarrus}]{} = -(0 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 7 + 3 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 7 - 0 \cdot 4 \cdot 0 - 4 \cdot 2 \cdot 2)$$

$$= -(24 - 63 - 16) = \underline{\underline{55}}$$